## 081 最优美的数学公式

数学中五个最基本的常数 $0,1,i,\pi,e$ 满足 $e^{i\pi}+1=0$.

在 1748 年,欧拉发现了三角函数和指数函数的深刻联系:对任意实数 $x$,均有

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}.$$

这是数学中最为优美的公式之一,因为它把三角函数和指数函数这两类初等函数借助于虚数单位 $i=\sqrt{-1}$巧妙地联系了起来.特别地,在上述欧拉公式中令 $x=\pi$,由于 $\cos\pi=-1$ 及 $\sin\pi=0$,故上述公式变为

$$e^{i\pi}+1=0.$$

回想一下数学中的许多常数,当属 $0,1,i,\pi,e$ 这五个最为根本:从 0 和 1 出发可以衍生出所有的实数,再加上 $i=\sqrt{-1}$后又可得到所有的复数,而圆周率 $\pi$ 是几何中最为基本的数量,$e$ 又被称为自然常数,在描述变化率(如出生率和死亡率)等问题中经常出现,因而在分析数学中扮演了重要的角色.现在,这五个最为基本的数学常数竟然以如此简洁的方式联系在一起,充分显示了数学中的优美和谐,故许多人都认为 $e^{i\pi}+1=0$ 堪称是数学中最为优美的公式.

下面将介绍欧拉是如何发现和推导出上述欧拉公式的.需要说明的是,由于微积分的严密基础以及复变函数理论直到 19 世纪中叶后才得以建立,所以欧拉的推理过程并不严格,有些细节要靠

一百多年后的数学发展才能够说清楚缘由.但欧拉毕竟是一位形式主义大师,他的思维方式代表了 18 世纪数学的风格,充满了强烈的创新精神和大胆推理的气概,而把那些需要小心求证的细节留待后人.因此,这里介绍的欧拉思维并不是一种真正严格意义上的数学证明,而更像一种数学发现的艺术,显示了欧拉惊人的想像力和洞察力.下面将欣赏欧拉是如何从两个角度分别得出他那个优美公式的.

其一,根据三角函数和指数函数的幂级数展开公式

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

在 $e^x$ 中把 $x$ 替换为 $ix$,注意到 $i = \sqrt{-1}$的幂以 4 为周期:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1.$$

所以,在形式上欧拉就得到了下述关系式:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots, \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos x + i\sin x. \end{aligned}$$

当然,这个推理的不严格之处在于把实数 $x$ 换为复数 $ix$ 来得到 $e^{ix}$ 展开式的过程需要证明,但这一点在后来的复变函数论中才能说清楚.

其二,对任意正整数 $n$,考虑下述德莫弗(Demoivre, 1667－1754)公式

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

令 $\theta = x/n$,则有

$$\cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n.$$

对固定的实数 $x$,当 $n$ 趋于无穷大时显然有

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{n} = \cos 0 = 1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x/n)}{(x/n)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

这说明当 $n$ 趋于无穷大时 $\cos(x/n)$渐近地等于 1,而 $\sin(x/n)$也渐近地等于 $x/n$.注意到 $e$ 的定义为

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

所以,当用 1 代替 $\cos(x/n)$,以及用 $x/n$ 代替 $\sin(x/n)$时,就有

$$\cos x + i\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = e^{ix}.$$

同样地,这个推理也不够严格,因为公式

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

仅对实数 $x$ 才成立.当然,尽管有这些不严格之处,却并不妨碍欧拉对数学真理的发现,这也是数学中经常出现的惊人事实.