008 素数的表达公式

如果 a,b 为互素的整数，则算术序列 $an+b$ 中包含无限个素数.

虽然在问题004中已经了解到费马数 $F_n=2^{2^n}+1$ 不能总给出素数，甚至也无法证明在所有的费马数中存在无穷多个素数，但人们还是热衷于寻找一个公式〔为了便于计算，最好是某个多项式

$f(n)$],希望它总能给出素数,或者退一步讲,至少从它能得到无穷多个素数.历史上,人们的确找到了许多有趣的多项式,它们甚至能连续地给出一些素数,但遗憾的是在大多数情形下,却无法证明这些多项式能给出无穷多个素数.

欧拉给出了一个二次多项式 $f(n)=n^2-n+17$,当 $n=0,1,\cdots,16$ 时,不难验证 $f(n)$ 均为素数.注意到

$$f(n)=n(n-1)+17=(-n)(-n+1)+17=f(-n+1),$$

所以,$f(-15),f(-14),\cdots,f(-1)$ 也都是素数.由此表明,当 n 连续地取遍从 -15 到 16 之间的 32 个整数时,相应的多项式 $f(n)=n^2-n+17$ 的值均能给出素数.这种由多项式连续地给出素数的现象令人十分惊奇,自然就产生了一个有趣的问题:一个二次多项式究竟能连续地给出多少个素数呢?

经过不懈的努力和寻找,欧拉终于在 1772 年又发现了一个非常著名的二次多项式 $f(n)=n^2+n+41$.当 n 依次从 0 取到 39 时,$f(n)$ 的这 40 个函数值也都是素数.同样该多项式也具有下述性质:

$$f(n)=n(n+1)+41=(-n)(-n-1)+41=f(-n-1).$$

所以,当 n 依次取从 -40 到 -1 之间的 40 个整数时,相应的多项式 $f(n)$ 之值也均为素数.换言之,该多项式 $f(n)$ 对 n 的连续 80 个取值(从 -40 直到 39)都能给出素数!另外,也有人不喜欢 n 取负整数,而希望 n 取非负整数 $0,1,2,\cdots$.为此,只需把 $n=x-40$ 代入到该多项式即得

$$f(x-40)=(x-40)(x-39)+41=x^2-79x+1601,$$

这样,当 x 从 0 依次取到 79 时,多项式 $g(x)=x^2-79x+1601$ 的相应取值均为素数.

不可思议的是,继欧拉之后,人们再也找不到其他的二次多项式 an^2+bn+c,它对 n 的某些连续 80 个以上的取值都能给出素数.在许多次失败的尝试后,人们甚至猜想:没有一个二次多项式

能满足这样的性质，它对相继 80 个以上的函数值均为素数. 这当然是一个相当困难的问题，要想在近期内证明这一猜想，希望十分渺茫. 但对欧拉发现的著名多项式 n^2+n+41 而言，在 1967 年有人证明：如果多项式 n^2+n+a 对 $n=0,1,\cdots,a-2$ 全部给出素数，则 $a\leqslant 41$. 这也算是差强人意了.

现在一般地考虑正次数多项式 $f(n)=a_mn^m+\cdots+a_1n+a_0$，有两个自然的问题：对某些特殊选取的整数 a_i，(1)该多项式能否总给出素数？(2)该多项式能否给出无限个素数？

问题(1)的答案是否定的. 事实上，如果某个多项式 $f(n)$ 在 n 等于某个正整数 s 时给出素数 p，即 $f(s)=p$，则对任意整数 k，不难看出 $f(s+kp)=f(s)+p(\cdots)$ 可被 p 整除. 所以，当假设 $f(n)$ 的值总是素数时，就有 $f(s+kp)=f(s)=p$. 由此表明，多项式 $f(x+s)-f(s)$ 有无穷多个不同的根 $x=kp$，但这是不可能的，因为一个 m 次多项式最多只有 m 个根(见问题 041).

相比之下，问题(2)的解答则要困难得多. 如果希望多项式

$$f(n)=a_mn^m+\cdots+a_1n+a_0$$

能给出无限多个素数，一个必要条件是它的各项系数 $a_0,\cdots,a_m$ 的最大公因子为 1，高斯称这类多项式为本原多项式. 不难看出，该必要条件并不充分，例如多项式 $f(n)=n^2+n=n(n+1)$ 对 n 的每个整数取值均为偶数，也就是说，它只能给出一个素数 2. 事实上，对许多次数大于 1 的多项式，例如 n^2+1，人们猜测它们能给出无穷多个素数. 虽然看起来该猜想应该是正确的，但至今仍然无法证明.

令人欣慰的是，对于一次多项式 $an+b$，如果系数 a 和 b 为互素的整数，亦即 a 和 b 的最大公因子为 1，则当 n 取遍正整数时，$\{an+b\}$ 中的确包含了无穷多个素数. 这个非凡的定理是由高斯的学生狄利克雷(Dirichlet, 1805 - 1859)在 1837 年首先证明的.