

一条连续的曲线可以填满一个正方形吗？

一直到 19 世纪中叶微积分严密化以前，曲线始终是几何学中的一个自明的原始概念。平面上一条所谓的连续曲线，被人们想像成一个动点在平面上连续运动时的轨迹。事实上，这种直观的且带有物理色彩的曲线概念妨碍了对它所作的精细研究。例如，按照人们的几何直觉，一条曲线只有长度而没有宽度和厚度，因此，任何一条曲线都不可能把一块面积填满。然而，意大利数学家皮亚诺 (G. Peano, 1858 - 1932) 却在 1890 年构造出一条连续的曲线恰好能填满一整块正方形，引起了整个数学界的震惊。

按照法国数学家若当 (C. Jordan, 1838 - 1922) 的定义，一条平

面曲线是由下述两个方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), (0 \leq t \leq 1)$$

所给出的点 (x, y) 的集合. 如果两个参数函数 φ 和 ψ 关于自变量 t 都连续, 则称所定义的曲线为连续曲线. 具体来讲, 皮亚诺构造出两个连续函数 φ 和 ψ , 使得相应的连续曲线能通过一个给定的单位正方形中的每一点(包含边界上的点).

继皮亚诺之后, 人们又发现了许多也能填满整个正方形的连续曲线, 有的甚至是处处没有切线的. 现在, 这类曲线统称为皮亚诺曲线. 虽然希尔伯特对皮亚诺的曲线做了简化, 给出了它的直观构作, 但总的来说, 皮亚诺曲线的定义较为复杂, 这里就不再作进一步的介绍了.