



亲和数

是否有无穷多对亲和数？

什么是亲和数呢？亲和数是这样一对正整数 a 和 b ，使得 a 的所有真因子的和等于 b ，而 b 的所有真因子的和等于 a 。

亲和数问题最早曾被毕达哥拉斯学派研究过，他们给出了第一对亲和数：284 和 220。 $284 = 2^2 \times 71$ ，284 的所有真因子为 1, 2, 4, 71, 142，和为 $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$ 。 $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ ，其全部真因子为 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110，和为 $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ 。后来的两千年内虽然对亲和数的研究有过有意义的工作，但是一直没有发现新的亲和数。难道亲和数对是惟一的？这一问题由于 1636 年费马给出另一对亲和数：17296 和 18416 才有了答案。1638 年笛卡尔给出了第三对亲和数。对亲和数作过研究的另一位著名数学家是欧拉。他在 1747 年前后给出了一个 62 对亲和数的亲和数表。令人意想不到的是 1866 年一位意大利 16 岁的少年帕格尼尼 (Paganini) 发现了一对比较小的亲和数：1184 和 1210，如果把亲和数对按从小到大的顺序排列的话，那么这位少年发现的这对亲和数排在第二位。目前已经知道有 1000 多对亲和数，而在 10000 以内只有 5 对，在 100000 以内有 13 对，它们是：220 和 284、1184 和 1210、2620 和 2924、5020 和 5564、

6232 和 6368、10744 和 10856、12285 和 14595、17296 和 18416、63020 和 76084、66928 和 66992、67095 和 71145、69615 和 87633、79750 和 88730. 在这 13 对亲和数中,要么是偶数对,要么是奇数对,没有一奇一偶的数对,而且偶数对比较多,在这 13 对中奇数对只有 3 对. 亲和数对的一般性质我们知道得极少,更没有什么公式可使我们依照它来求得亲和数. 现在求亲和数的方法是用计算机. 用计算机可以很容易找出亲和数,首先求出数 m 的所有真因子,将这些真因子求和. 这个和记为 n ,然后求出数 n 的所有真因子,将这些真因子同样求和,如果所得的和恰好为 m ,则 m, n 为一对亲和数,否则, m, n 就不是亲和数对. 20 世纪 60 年代,美国耶鲁大学的专家在 IBM7094 计算机上,对全部 100 万以下的数进行了这种检查,结果发现了 42 对亲和数,其中有些是过去已经知道的,也有新的. 用这种方法对 100 万以上的数可进行同样的检查.

用计算机求亲和数对比过去用手工和数论技巧来发现要高效得多,但是不管检查到多大的数为止,总之是在有限数的范围内进行,最后只能知道在一定范围内亲和数的情况. 大家知道数有无穷多,在无穷多个数中,全部有多少对亲和数? 用计算机检查这一方法是不能解决这一问题的. 所以,关于亲和数的问题是:亲和数对是有限的,还是无限的? 有没有奇数和偶数构成的亲和数对? 亲和数对有什么一般的性质? 等等.