168 三等分任意角问题

分一个给定的角为三个相等的部分.

这个问题是古希腊三个著名作图题之一,在公元前5世纪左右的古希腊就已经提出来了.它是在推广二等分任意角问题时提出的.二等分任意角就是将一个给定的角分成相等的两部分.这个问题用直尺和圆规很容易就可以解决,这是大家所共知的事实.在二等分任意角后,很自然地会考虑三等分任意角,只用直尺和圆规如何将一任意角分成相等的三部分呢?即如何用直尺和圆规三等分任意角.古希腊学者以及后来的数学家纷纷投入到这一问题的研究中,对这一问题得到了一些不同的解法.如利用割圆曲线、尼科梅德斯蚌线、阿基米德螺线和阿基米德的活动转杆装置等方法,还有后来的帕普斯(Pappus,约公元300年)利用二次曲线的解法,但是这些方法都超越了只用直尺和圆规的限制.数学家们一直在寻求只用直尺和圆规解决这一问题的方法,但都以失败而告终.直到19世纪才严格证明只用尺规是不能三等分任意角的,到此对这

一问题的讨论才画上了一个圆满的句号. 下面来介绍直尺和圆规何以不能三等分任意角.

用 3θ 表示要三等分的任意角, 由 3 倍角公式:

$$\cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

得

$$2\cos3\theta = 8\cos^3\theta - 6\cos\theta = (2\cos\theta)^3 - 3\cdot2\cos\theta.$$

记 $2\cos\theta = x_0$, $2\cos3\theta = a$, 则 $x_0^3 - 3x_0 = a$, 或 $x_0^3 - 3x_0 - a = 0$. 这就是说 x_0 为多项式 $p(x) = x^3 - 3x - a$ 的根. 由 $a = 2\cos3\theta$, 知 $-2 \leqslant a \leqslant 2$. 如果用直尺和圆规可以三等分任意角的话, 那么, 对任意实数 $a(-2 \leqslant a \leqslant 2)$, 都可以用直尺和圆规做出 x_0, 因此 x_0 必为有理数域中某 2^n 次不可约多项式的根. 从 x_0 为多项式 $p(x) = x^3 - 3x - a$ 的根, 以及这个多项式的次数是 3 次, 知 $p(x) = x^3 - 3x - a$ 为有理数域中一可约多项式, 故 $p(x) = x^3 - 3x - a$ 必有一个有理根. 相反, 如果能够找到一种情形, 在这种情形下, 多项式 $p(x) = x^3 - 3x - a$ 没有有理根, 则说明只用直尺和圆规并不总能三等分任意角. 下面看情形: $3\theta = 60°$, 这时 $a = 1$, $p(x) = x^3 - 3x - 1$. 如果最简分数 b/a(a 和 b 互素)为多项式 $p(x) = x^3 - 3x - 1$ 的根, 则 $(b/a)^3 - 3(b/a) - 1 = 0$. 由此有 $b^3 = a^2(3b + a)$, 则 $a = 1$. 否则, a 的素因子就为 a 和 b 的公因子, 这与 a 和 b 互素相矛盾. 由 $a = 1$ 得 $b^3 - 3b - 1 = 0$, 进而有 $b(b^2 - 3) = 1$, 由此得 $b = \pm1$. 但是, ±1 不是多项式 $p(x) = x^3 - 3x - 1$ 的根. 这就表明多项式 $p(x) = x^3 - 3x - 1$ 没有有理根. 所以, $60°$ 是不能用直尺和圆规三等分的.

需要说明的一点是, 并不是所有的角都不能三等分. 只要多项式 $p(x) = x^3 - 3x - a$ 的根是有理数或平方根类的无理数, 那相应的角就可以三等分. 如对 $90°$ 角, $a = 0$, $p(x) = x^3 - 3x$, 它的根为有理数 0, 无理数 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$. 这就是说 $90°$ 角是可以用直尺和圆规三等分的.

在结束之前, 简要介绍一下用阿基米德活动转杆装置三等分

角的方法.活动转杆装置是这样的装置,它由两部分组成:主杆(BG)和活动杆(OG).活动杆的一端(O)和主杆的一端对齐(D),另一端(G)固定在主杆上,固定点用 G 表示.设$\angle AOB$ 是要三等分的角(一锐角),且可以取 $OA = OB$ 和活动杆 OG 有相同的长度.将活动杆活动的一端固定在 O 点,主杆过 B 点,滑动转杆装置使得主杆与活动杆相齐的一端与 AO 的延长线相交,交点用 D 表示,如图 7 所示.

由于 GO 为活动杆,所以 $DG = GO = OB$.因而

$$\angle GDO = \angle GOD,\ \angle OGB = \angle OBG.$$

由于三角形的外角等于两个不相邻的内角的和,则

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle GDO + \angle OBG \\ &= \angle GDO + \angle OGB \\ &= \angle GDO + \angle GDO + \angle GOD \\ &= 3\angle GDO.\end{aligned}$$

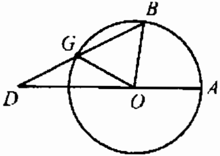

图 7

这就是说,$\angle GDO$ 为$\angle AOB$ 的三分之一.