## 006 完全数

### 存在奇完全数吗?

$a,b$ 为两个正整数,如果一个数 $a$ 整除数 $b$,则称 $a$ 为 $b$ 的一个因子.如果还有 $a<b$,则称 $a$ 为 $b$ 的一个真因子.

如果一个数的所有真因子的和等于这个数,则称这个数为完全数.

最小的完全数是 6,$6=1+2+3$. 下一个是 28,$28=1+2+4+7+14$. 再下一个是 496,$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$. 总共有多少完全数呢? 这个问题至今还是个谜. 截至今日只知道 32 个完全数,他们都是偶数.

完全数的讨论在古希腊时代就开始了,古希腊的毕达哥拉斯学派就讨论过完全数. 在欧几里得(约公元前 300 年)《原本》的第九卷有一个命题是关于完全数的. 这个命题说:如果 $2^n-1$ 是素数,则 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是一个完全数. 这个命题不难证明. 事实上,记 $k=2^n-1$,$2^{n-1}(2^n-1)=2^{n-1}k$,由于 $k$ 是素数,则 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的全部因子(包括自身)为 $1,2,2^2,\cdots,2^{n-1},k,2k,2^2k,\cdots,2^{n-1}k$. 他们的和为

$$\begin{aligned}&1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+k+2k+2^2k+\cdots+2^{n-1}k\\=&(2^n-1)(k+1)\\=&(2^n-1)2^n\\=&2\cdot2^{n-1}(2^n-1),\end{aligned}$$

因此,全部真因子的和为 $2^{n-1}(2^n-1)$. 可见 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是一个完全数. 在问题 005 中曾讨论过,如果 $n$ 是合数,则 $2^n-1$ 也是合数. 由此可见,只有当 $p$ 为素数,且 $2^p-1$ 是素数时,$2^{p-1}(2^p-1)$ 才是一个完全数. 而这时 $2^p-1$ 是梅森素数. 所以每一个梅森素数,对应一个完全数. 上面提到的 3 个完全数是前 3 个梅森素数 $M_2=2^2-1$,$M_3=2^3-1$,$M_5=2^5-1$ 给出的,$6=2(2^2-1)$,$28=2^2(2^3-1)$,$496=2^4(2^5-1)$. 偶完全数除了这种形式之外,还有没有别的形式? 在欧几里得时代两千年以后的 18 世纪,著名数学家欧拉证明,如果一个偶数是完全数,则它一定具有 $2^{p-1}(2^p-1)$ 这样的形式,这里 $p$,$2^p-1$ 均为素数. 也就是说欧几里得给出了偶完全数的惟一的表达式.

关于完全数这一奇妙的数论问题,现在遗留的问题是:有没有奇完全数? 至今没有发现一个奇完全数,也没有从理论上证明其

存在性.关于这一问题的研究,虽然没有获得最终的解决,但是也得到了一些有价值的结论.欧拉证明,如果 $n$ 为奇完全数,则 $n = p^a q_1^{b_1} \cdots q_k^{b_k}$,其中 $p, q_1, \cdots q_k$ 是不同的素数,并且 $a \equiv p \equiv 1 \pmod 4$,$b_1, \cdots, b_k$ 均为偶数.1973 年得到的结论是:如果 $n$ 为奇完全数,则 $n > 10^{50}$.1978 年的结论是:如果 $n$ 为奇完全数,则 $\sum_{p \mid n} \frac{1}{p} < \ln 2$.1980 年的结论是:如果 $n$ 为奇完全数,则 $n$ 至少有 8 个不同的素因子.