059 埃尔多斯定理

三角形内部或边界上的任意一点到各顶点的距离和大于或等于该点到各边距离和的两倍.

在1935年,著名的匈牙利数学家埃尔多斯(Paul Erdös,1913-1996)提出一个有关平面几何问题的猜想:任意$\triangle ABC$内部或边界上的任意一点I到各顶点的距离和大于或等于I到各边距离和的两倍.而且他还猜测两倍的情形当且仅当$\triangle ABC$是等边三角形且I为其外接圆的圆心时才出现.

这显然是一个优美的几何问题,但它的证明颇为不易.第一个证明是大数学家莫德尔(L.J.Mordell)在1937年给出的,所以该问题又称为埃尔多斯和莫德尔定理.因为莫德尔的方法并不初等,所以多年来人们一直想得到一个较为初等的证明.直到1945年,才由卡扎利诺夫(D.K.Kazarinoff)发表了第一个初等的证明,尽管如此,人们还是认为他的这个证明技巧太高,显得很不自然.下面将

介绍由阿莱(A. Arez)在 1993 年找到的关于这个埃尔多斯和莫德尔定理的一个更为简洁而自然的证明.

在阿莱的证明中要用到一个平面几何中著名的定理,即托勒密定理,它是由古希腊天文学家托勒密在公元 100 年左右发现并证明的.托勒密定理断言任何一个内接于圆的凸四边形,它的两对边的乘积之和等于其对角线的乘积(见问题 058).另外,阿莱还用到了一个简单的代数结论:设 r 为正实数,则

$$r+r^{-1}\geqslant 2,$$

并且等式成立当且仅当 $r=r^{-1}$,亦即 $r=1$.这一事实从

$$(\sqrt{r}-\sqrt{r^{-1}})^2\geqslant 0$$

展开后即可得到证明.

有了以上的准备,就可以介绍阿莱的证明了.设 I 是任意$\triangle ABC$ 内部或边界上的任意一点,记三角形各边以及 I 到三角形各顶点的距离分别为

$$a=BC,\ b=AC,\ c=AB,$$

$$a'=IA,\ b'=IB,\ c'=IC.$$

再设 I 到各边 BC, CA 和 AB 的距离分别是 a'', b'' 和 c''.令 S 是通过$\triangle ABC$ 三个顶点的圆,方便起见,假设 S 的直径为 1.现在,设过 A 和 I 的直线交圆 S 于另一点 A',如图 4 所示.对圆内接四边形 $ABA'C$ 应用托勒密定理可知

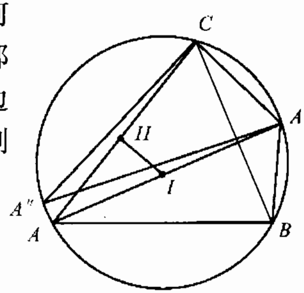

图 4

$$A'C\cdot AB+BA'\cdot AC=AA'\cdot BC. \tag{1}$$

设 IH 为$\triangle AIC$ 的高,垂足为 H,再设 A'' 为 A' 关于圆 S 的对径点,即 $A'A''$ 为 S 的直径.因为等弧对等角,故圆周角$\angle A'AC$ 和$\angle A'A''C$ 相等,从而两个直角三角形 AIH 和 $A''A'C$ 相似.于是有

$$AI\cdot A'C=A'A''\cdot IH=b''.$$

同理可证 $IA \cdot BA' = c''$. 在(1)式的两边同时乘以 $IA = a'$,并除以 $BC = a$ 后可得

$$b''\frac{c}{a} + c''\frac{b}{a} = a' \cdot AA'.$$

对三角形的另外两个顶点 B 和 C 做类似于对 A 的讨论,同理可得到下面两个相应的等式

$$a''\frac{c}{b} + c''\frac{a}{b} = b' \cdot BB'.$$

$$a''\frac{b}{c} + b''\frac{a}{c} = c' \cdot CC'.$$

最后把所得的三个等式相加即为

$$a' \cdot AA' + b' \cdot BB' + c' \cdot CC' = a''\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + b''\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + c''\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right).$$

因为已经规定圆 S 的直径为 1,故 AA', BB' 和 CC' 都不大于 1,从而

$$a' + b' + c' \geqslant a' \cdot AA' + b' \cdot BB' + c' \cdot CC',$$

且等式成立当且仅当 AA', BB' 和 CC' 均为直径,这相当于说 I 为外接圆 S 的圆心. 另一方面,根据前述的代数预备不等式,有

$$a''\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + b''\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + c''\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geqslant 2(a'' + b'' + c''),$$

且等式成立当且仅当 $a = b = c$,亦即 $\triangle ABC$ 为正三角形. 总之,证明了

$$a' + b' + c' \geqslant 2(a'' + b'' + c''),$$

并且等式成立的充要条件是 $\triangle ABC$ 为正三角形且 I 为其外接圆的圆心,而这正是埃尔多斯和莫德尔定理的内容.