005 梅森数

是否有无穷多个形如 2^p-1 的素数?

梅森数是指形如 2^p-1 的数,其中 p 为素数.如果 2^p-1 还是个素数,则称为梅森素数.梅森素数问题是指:什么样的素数 p 给出梅森素数? 梅森素数总共有有限多个,还是无穷多个? 这些问题迄今都没解决.

形如 2^n-1($n>1$ 是正整数)的数,当 n 是合数时,一定不是素数.事实上,设 $n=kt(k\geqslant 2,t\geqslant 2)$,则 $2^n-1=2^{kt}-1=(2^k)^t-1=(2^k-1)[(2^k)^{t-1}+(2^k)^{t-2}+\cdots+2^k+1]$是合数.这表明对于形如 2^n-1($n>1$ 是正整数)的数,只需讨论 n 是素数的情形,即梅森数.用 M_p 表示数 2^p-1.那么梅森数是素数还是合数呢? 数学家很早就发现,当 $p=2,3,5,7$ 时,梅森数都是素数.但当 $p=11$ 时,梅森数不是素数,因为,$M_{11}=2^{11}-1=2047=23\times 89$.所以梅森数有的是合数有的是素数.数学家对寻找梅森素数倾注了极大的热情,付出了许多艰苦的劳动.在用计算机寻找梅森素数之前,数学家们发现了 12 个梅森素数.这 12 个梅森素数最大的一个是 M_{127}.这是一个巨大的数,它有 39 位数字!

$$M_{127}=170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

要证明这个 39 位数是素数，其中的数学智慧和辛勤劳动，让现代人也不得不敬佩. 随着素数 p 的值的增大，梅森数增大的速度非常快. 当 p 较大时，如果不借助于计算机，完全用计算技巧和数论功夫，要判断梅森数是否是素数，是一件很不容易的事.

梅森素数的寻找过程可分为两个阶段：1952 年之前的手工计算阶段和 1952 年之后的计算机辅助阶段. 第一阶段的 12 个梅森素数对应的 p 值分别为：2，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127. 其中第八个梅森素数 M_{31} 是 1750 年瑞士数学家欧拉证明的. 1876 年法国数学家罗卡斯(Lucas)证明了 M_{127} 是素数. 1952 ~ 1992 年的 40 年间利用计算机得到 20 个梅森素数. 它们对应的 p 值分别为：

521，607，1279，2203，2281，3217，4253，4423，9689，9941，11213，19937，21701，23209，44497，86243，110503，132049，216091，756839.

从这些 p 值可以看出，相邻的两个 p 值的差越来越大，就是说梅森素数越来越稀少. 但是梅森素数是否只有有限多个，这还是一个未解决的数论难题.

虽然现在总共发现了 32 个梅森素数，但是后面的这些梅森素数已经相当巨大. 我们可以很容易地把它们的位数计算出来. 事实上，梅森素数 $M_p = 2^p - 1$ 的位数和 2^p 的位数是相同的. 因为如果 2^p 的位数比 M_p 的位数大的话，注意到 $2^p = M_p + 1$，则 $M_p = 999\cdots9$. 这与 M_p 是素数相矛盾. 设梅森素数 M_p 也就是 2^p 为 n 位数，则 $2^p = a \cdot 10^{n-1}$，其中 $1 \leqslant a < 10$. 两端取常用对数得 $p\lg 2 = \lg a + n - 1$，把 1 移到等式的左面得 $p\lg 2 + 1 = \lg a + n$. 由于 $1 \leqslant a < 10$，根据对数的性质得 $0 \leqslant \lg a < 1$. 可见 n 为 $p\lg 2 + 1$ 的整数部分. 下面取 $\lg 2$ 的近似值 0.30103，估计几个梅森素数的位数.

(1) M_{127}.

$p = 127$，$p\lg 2 + 1 = 127 \times 0.30103 + 1 = 39.23081$，所以梅森素数 M_{127} 是个 39 位数.

(2) M_{44497}.

$p = 44497$，$p\lg 2 + 1 = 44497 \times 0.30103 + 1 = 13395.93193$，所以梅森素数 M_{44497}是个 13395 位数.

(3) M_{756839}.

$p = 756839$，$p\lg 2 + 1 = 756839 \times 0.30103 + 1 = 227832.24417$，所以梅森素数 M_{756839}是个 227832 位数.

梅森(M. Mersenne, 1588 – 1648)是法国人.他曾与数学家笛卡尔(R. Descartes, 1596 – 1650)一起研究数学.1617 年因笛卡尔加入了奥朗日的莫里斯亲王的军队,梅森进了教会 . 他对科学所做的主要贡献有两方面,一是他为了捍卫科学真理做了很多工作.教会对伽利略的科学思想坚决排斥,他却翻译伽利略的著作,以实际行动拥护这些科学思想.二是他充当了科学家们交流思想的联络员角色.科学家们的新思想首先写信给梅森,然后梅森再写信给其他的科学家.这样科学家们通过梅森把自己的科学思想介绍了出去,相互之间进行了交流.梅森深感这种交流的重要,因此不断策动别人参加.由于这种通信,他因此对许多学者的工作有了了解.他向他们提供建议.在这方面的一个典型例子是,他向惠更斯(Christian Huygens, 1629 – 1695)建议用单摆来作为时计.梅森是在和伽利略的通信交往中了解到单摆原理的,他又在和惠更斯的通信中了解到了惠更斯的研究,而向他提出了这个建议.惠更斯采用了这个建议,结果发明了钟摆式时计.这个事例说明,进行科学思想交流的重要性.