049 一般四次方程的求根公式

一般的四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 有求根公式吗？其中 a,b,c,d,e 均为常数，且 $a\neq 0$.

在历史上，三次方程的成功解出立即为求解一般四次方程铺平了道路，这一伟大的业绩是由卡当的仆人和学生费拉里完成的. 他通过配方法成功地把一般四次方程的解法归结成两个二次方程

和一个三次方程的求解，其解法发表在卡当的《大法》一书中，通常称为费拉里方法，下面作一个简单介绍.

通过除去首项系数 a，可设一般四次方程为

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{1}$$

用配方法把(1)改写成以下形式

$$(x^2 + \frac{b}{2}x)^2 = (\frac{b^2}{4} - c^2)x^2 - dx - e,$$

接着，两边加上$(x^2 + \frac{b}{2}x)y + \frac{1}{4}y^2$，得到

$$(x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{y}{2})^2 = (\frac{b^2}{4} - c + y)x^2 + (\frac{b}{2}y - d)x + \frac{1}{4}y^2 - e. \tag{2}$$

费拉里的巧妙想法是，通过精心选择 y 的值，设法使方程(2)的右边和左边一样也是一个完全平方，这就能把方程(2)关于 x 的四次方程分解成 x 的两个二次方程，从而根据一元二次方程的求根公式得到 x 的四个根. 为此，只需令右边关于 x 的二次式的判别式等于零，即

$$(\frac{b}{2}y - d)^2 - 4(\frac{b^2}{4} - c + y)(\frac{1}{4}y^2 - e) = 0,$$

接着，将其整理为一个关于 y 的三次方程

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y + (4ce - b^2e - d^2) = 0. \tag{3}$$

根据三次方程的卡当公式，可求(3)的三个根. 设 α 为任意一个根，则把 $y = \alpha$ 代入(2)即可得到

$$(x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{\alpha}{2})^2 = (\sqrt{\frac{b^2}{4} - c + \alpha}\,x + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - e})^2. \tag{4}$$

于是，通过开平方，方程(4)又可化为 x 的两个二次方程：

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{\alpha}{2} = \pm(\sqrt{\frac{b^2}{4} - c + \alpha}\,x + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - e}),$$

按照等式右边的正负号，依次整理为 x 的一个二次方程

$$x^2 + (\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c + \alpha})x + (\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - e}) = 0, \tag{5}$$

和 x 的另一个二次方程

$$x^2+\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c+\alpha}\right)x+\left(\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-e}\right)=0. \tag{6}$$

最后,根据一元二次方程的求根公式,从(5)中解出 x 的两个根,记为 x_1 和 x_2;再从(6)中求出 x 的两个根,记之为 x_3 和 x_4.另外,假如让 α 取(3)中的三次方程其他的两个根,则不难验证相应的方程(5)和(6)仍将产生相同的 x_1,x_2,x_3,x_4,只不过足标要做一些相应的改变.总之,x 的这四个取值 x_1,x_2,x_3,x_4 即为方程(1)的全部根,由此表明一般四次方程也有求根公式.但鉴于计算的复杂性,在此就不给出四次方程具体的求根公式了.