034 华罗庚恒等式

除环中任意两个不交换的元素所满足的一个等式.

作为“华氏直接法”的又一个范例,下面来介绍著名的嘉当-布劳尔-华(Cardan - Brauer - Hua)定理.这是关于除环的又一个深刻的结果,也是华罗庚在1949年研究除环理论时接连证明的几个惊人的定理之一.

假设 D 为一个除环,K 为 D 的一个非空子集.如果 K 在 D 的加法运算、减法运算、乘法运算以及除法运算下封闭,即对任意 $a, b \in K$,均有 $a+b, a-b, ab \in K$,以及当 b 不为零时还有 $ab^{-1} \in K$,则称 K 为 D 的一个子除环.这时,不难看出 K 本身关于 D 中的加法运算和乘法运算即构成一个除环.一个基本的问题是:如何确定一个除环的所有子除环呢?例如,D 也是其自身的一个子除

环,另外一个子除环由单位元 1 生成,即 D 的所有子除环的交,不难验证这是 D 的一个子除环,而且还是 D 的最小子除环.最小子除环的结构十分简单,在给出它的描述之前,需要引入除环的特征定义.

如果存在一个正整数 n 使得 n 与除环 D 的单位元 1 的乘积 $n\cdot 1=0$,则把具有如此性质的最小正整数 n 称为除环 D 的特征;如果这样的正整数 n 不存在,则称除环 D 的特征为 0.除环的特征要么是零,要么是一个素数.因为当除环 D 的特征是一个正整数 n 时,假如 n 可分解为 $n=n_1n_2$,则 $(n_1\cdot 1)(n_2\cdot 1)=(n_1n_2)\cdot 1=n\cdot 1=0$.注意到在除环中非零元的乘积也非零,故有 $n_1\cdot 1=0$ 或者 $n_2\cdot 1=0$.但 n 是满足 $n\cdot 1=0$ 的最小正整数,由此推出 $n=n_1$ 或 n_2,这就证明了 n 只能是素数.

现在考察除环 D 的最小子除环的结构.如果除环 D 的特征为素数 p,则 D 中单位元 1 的所有整数倍 $n\cdot 1$ 构成的集合实际上只有 p 个不同的元素,即为 $\{1\cdot 1,2\cdot 1,\cdots,p\cdot 1=0\}$.不难看出该集合在除环 D 的加法运算和乘法运算下构成一个环,并且映射 $m\to m\cdot 1$ 给出了从整数模 p 剩余类环 $\mathbb{Z}_p$ 到该集合的一个环同构.因为 p 为素数,故 $\mathbb{Z}_p$ 为一个域.所以 $\{1\cdot 1,2\cdot 1,\cdots,p\cdot 1=0\}$ 也是 D 的一个交换的子除环,简称为 D 的子域.至此,证明了当除环的特征为素数 p 时,它的最小子除环恰好由单位元的所有整数倍组成,因此它不仅同构于 $\mathbb{Z}_p$,而且与除环中的每个元素均可交换.同理,当除环 D 的特征为 0 时,可以建立从有理数域 $\mathbb{Q}$ 到 D 的一个单射 $m/n\to(m\cdot 1)(n\cdot 1)^{-1}$,因此,如果记

$$D_0=\{(m\cdot 1)(n\cdot 1)^{-1}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\},$$

则不难验证 D_0 在 D 的加法运算和乘法运算下也构成一个环,并且上述从 $\mathbb{Q}$ 到 D_0 的映射是一个环同构.所以 D_0 也是一个域,从而是 D 的最小子域,且 D_0 中的元素与 D 中的每个元素均可交换.因此,把那些和 D 中每个元素都交换的元素称为 D 的中心元,

所有中心元的集合记为 $Z(D)$,亦即

$$Z(D)=\{a\in D\mid ax=xa,\forall x\in D\},$$

称之为 D 的中心. 不难验证除环的中心也是一个交换的子除环,即为该除环的一个子域. 除环的中心在除环理论中特别重要,一方面是因为它衡量了除环的非交换性程度,另一方面还因为域的理论较为丰富和完善,相对于除环容易处理些. 总之,证明了除环的最小子除环在特征为素数 p 时同构于$\mathbb{Z}_p$,在特征为 0 时同构于有理数域$\mathbb{Q}$,而且除环的中心是一个子域,自动包含最小子除环.

因为域是一个交换的除环,即域是除环的特殊情形,所以直观上子除环未必交换. 可是,当人们仔细考察除环的各种子除环时,发现有一类所谓的“正规子除环”特别重要. 它的定义为:假设 K 是除环 D 的一个子除环,如果对 D 中每个非零的元素 d,均有 $dKd^{-1}=\{dxd^{-1}\mid x\in K\}\subseteq K$,则称 K 为 D 的一个正规子除环. 例如,除环 D 本身,D 的中心 $Z(D)$,以及 D 的最小子除环等均为 D 的正规子除环.

关于正规子除环最重要的问题是:设 D 为除环,是否每个不等于 D 的正规子除环都含于该除环的中心内?

这个问题特别有名. 首先是法国数学家嘉当(H. Cardan,)对一类称为“可除代数”的特殊除环给出了肯定的证明,接着由华罗庚和德国数学家布劳尔(R. Brauer,1901—1977)独立地得到了一般情形的证明,所以这个定理现在被称为是嘉当 - 布劳尔 - 华定理. 但是,华罗庚的证明惊人地简洁,写出来只有短短的几行,只依赖于他发现的一个恒等式,其构思之巧妙,真令人叹为观止.

下面先介绍华罗庚恒等式,然后利用它证明上述嘉当 - 布劳尔 - 华定理.

设 D 为除环,$a,b\in D$. 如果 $ab\neq ba$,即 a,b 不可交换,则

$$\begin{aligned}&a[a^{-1}ba-(a-1)^{-1}b(a-1)]\\&=b-(a-1)^{-1}b(a-1)\neq 0.\end{aligned}\qquad(1)$$

这就是华罗庚发现的恒等式,它被证明是一个非常有用的公式.虽然其证明很简单,但能想到它绝非易事.事实上,从条件 $ab \neq ba$ 可知 $a-1\neq 0$,故 $a-1$ 在除环 D 中可逆,即 $(a-1)^{-1}$ 存在.直接计算即得

$$\begin{aligned}
& a[a^{-1}ba-(a-1)^{-1}b(a-1)] \\
= & ba-a(a-1)^{-1}b(a-1) \\
= & ba-[(a-1)+1](a-1)^{-1}b(a-1) \\
= & b-(a-1)^{-1}b(a-1).
\end{aligned}$$

另外,如果 $b-(a-1)^{-1}b(a-1)=0$,则 $(a-1)b=b(a-1)$,从此推出 $ab=ba$,矛盾于所给的条件.因此 $b-(a-1)^{-1}b(a-1)\neq 0$,这就完成了华罗庚恒等式的证明.

最后,用华罗庚恒等式证明:除环 D 的每个正规子除环 K 要么等于 D,要么含于 D 的中心 $Z(D)$ 内.

假设 $K\neq D$,要证明 $K\subseteq Z(D)$.任取 D 中一个不属于 K 的元素 a 以及 $b\in K$,显然 a 不等于 0 和 1,故 a^{-1} 和 $(a-1)^{-1}$ 都存在.又因 K 为正规子除环,所以 $a^{-1}ba$ 和 $(a-1)^{-1}b(a-1)$ 都在 K 中.因此,如果 a 和 b 不交换,根据公式(1)可知

$$a=[b-(a-1)^{-1}b(a-1)][a^{-1}ba-(a-1)^{-1}b(a-1)]^{-1}\in K,$$

此矛盾表明 a 和 b 可交换,亦即 D 中每个不属于 K 的元素和 K 中的每个元素均两两可交换.现在,取 K 中的任意一个非零元 x,因为上述 a 不在 K 中,故 ax 也不属于 K,从而 ax 和 b 可交换.但 $x=a^{-1}\cdot(ax)$,表明 x 和 b 也可交换.这就证明了 K 中任意非零元素 x 和 D 中的每个元素均可交换,即 $x\in Z(D)$.显然 $0\in Z(D)$,所以 $K\subseteq Z(D)$.这就完成了嘉当－布劳尔－华定理的证明.