



几千年来,纽结、链节及其他类似的东西一直令有数学头脑的人着迷。上世纪二十年代,数学家们开始深入地研究下面这个不易对付的问题:如何刻划纽结的特征、区分不同的纽结并且一般说来弄清楚是什么东西使纽结得以结成,使链节得以连接起来。这导致了拓扑学的诞生。

过去十年中纽结理论取得了长足的进展。最显著的进展是, Vaughan Jones 发现了所谓的 Jones 多项式,即与某一纽结相关的一种代数公式。如果两个纽结的 Jones 多项式不同,那么它们是拓扑相异的,这就意味着其中一个纽结不能通过连续的变形变为另一个纽结。这种“纽结不变式”以前也曾发现过,但 Jones 多项式是新的一类超级不变式中的第一种,这类不变式的作用远远胜过先前的那些不变式。

然而,就是 Jones 多项式也不能让我们了解我们想知道的关于纽结和链节的所有方面。这些数学对象提出了一些甚至不属于拓扑学的问题,而这正是本文打算讨论的。数学游戏本来就有一种回避挑战的习惯,本文将走得更远,从一项充其量只能说勉强跟数学挨得上边的游戏开始。这游戏就是众所周知的儿童玩的挑绷子游戏。

虽说是“众所周知”,但实际上许多人并不知道这个游戏的内容之丰富。完整的挑绷子过程涉及 8 种单独的图形。通过同样的一般方法——用一根绳圈套在两手的手



指上然后绕来绕去——可以构造出不计其数的其他许多种图形。这个游戏说明,一个环圈的拓扑性质——例如纽结的数目——很难描述它的更丰富多彩的几何特性(如形状)。

设计出一种巧妙的挑绷子算法——也就是一种代数系统,它描述如何从平淡无奇的初始环圈出发通过各种各样的标准步骤得出更有意义的形状——应该是可能的。对纽结及其类似对象所进行的研究取得的最初成就之一是 Emil Artin 创立的辫理论。一个辫就是由若干条最初彼此平行的索线(或曲线)组成的一个系统。更一般的情况是允许这些索线彼此环绕,就像头发编成的辫子一样。Artin 提出了一种辫代数,它能区分拓扑不等价的辫。如果两个辫的代数公式相同,那它们就是等价的,如果它们的公式不同,它们就是不等价的,Artin 的设想在一定程度上启发了 Jones 的设想。

挑绷子图形在几个方面与辫相似。我们用索线要环绕的一组手指来代替辫的两个端头。但是,挑绷子游戏中允许的步骤比 Artin 使用的步骤更丰富:例如若干条索线可以绕在某一手指上。这就是为什么辫代数不足以描述挑绷子图形的原因之一。另一个原因——它可能并不象最初看起来那样重要——则是,所有挑绷子图形都与一个未打结的绳圈拓扑等价。

如果我们不只是考虑索线,而且考虑它是如何环绕这些手指的,那么就可以避开这个问题。但是这个儿童游戏的标准形式中还存在另外一种复杂情况:允许的挑绷子过程还涉及第二个人,他把手伸入图形中间并把图形转到他自己的手上——也就是把一个人的手上的图形变成了另一个人手上的不同的图形。

在玩挑绷子游戏时,需要找一根约 3 英尺长的软而光滑的绳子,把它的两头系在一起成为一个闭合环圈,还需要找一个朋友。假定 Angela 和 Bill 轮流把这个绳圈从对方的手上取下来。首先 Angela 作成绷子(参看图 1)。在挑绷子过程中有一个几乎每一步都要用到的基本动作,而这个基本动作就是挑绷子开始的地方。Bill 站在比如说 Angela 的右面。从上面往下看图形,他可以看到两个交叉点。他用手挑起这两个交叉点(一只手一个),并把它们拉开。然后他把绳子从图形中心向外远远地拉,绕过其外部边缘后向下、向内接着向再上穿过图形中间的空隙。

当 Bill 把他的手拉开并张开他的拇指和食指时,Angela 把绳圈从她的手指上松开并让它滑出去。现在 Bill 可以把新的图形套在他的手上了。这一步称为“士兵床”(soldier's bed)。如果 Angela 从这第二个图形开始完全重复上面这一套步骤,她就得到第三个图形,称为“蜡烛”(candles)。



从蜡烛出发变到第四个图形需要一个新的动作。Bill 首先用小指把处于相对两边的两根内侧绳中的一根向旁边拉,并用拇指和食指从下面伸进图形的中央。这同基本动作有点相似,但没有交叉的绳索被拉起。最后,Bill 是张开他的拇指和食指,并使小指弯下以便把绳圈套在他的小指上,所得的图形称为“马槽”(manger)。顺便说一下,马槽同猫篮(cat's cradle)相似,但上下颠倒了过来。

从马槽出发,重复一次基本动作——也是上下颠倒地进行,即从下面而不是从上

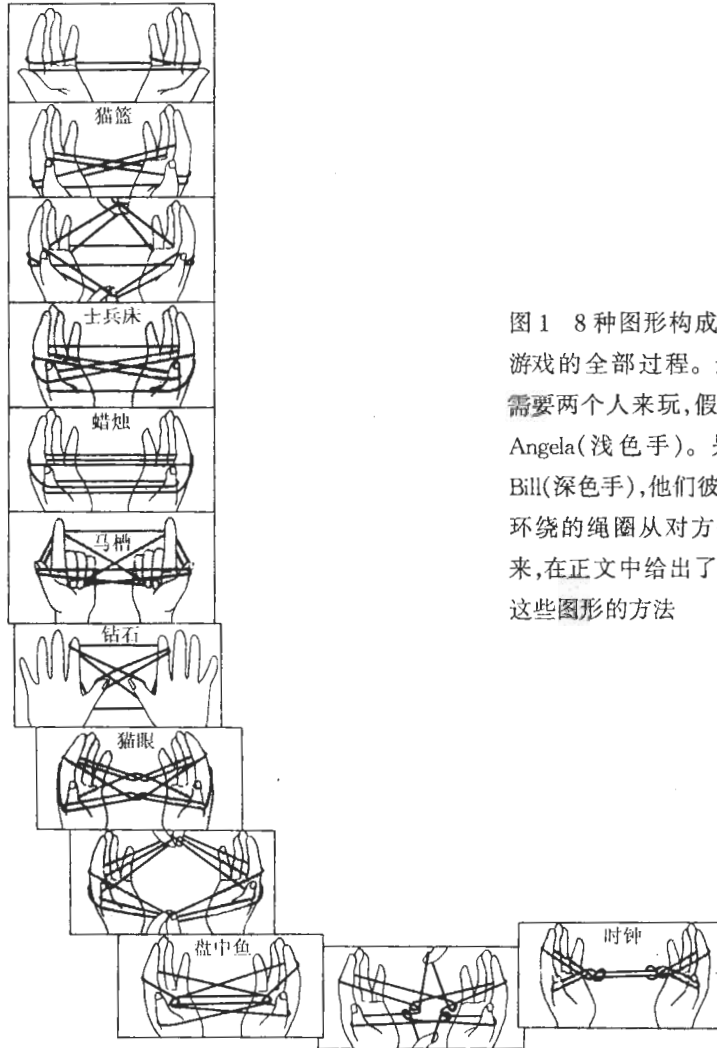


图1 8种图形构成了挑绷子游戏的全部过程。这个游戏需要两个人来玩,假定一个是Angela(浅色手)。另一个是Bill(深色手),他们彼此把一个环绕的绳圈从对方手上取下来,在正文中给出了如何作出这些图形的方法



面挑起绳索的交叉处——就得到了上下颠倒的士兵床。传统上这第五个图形称为“钻石”(diamonds)。再重复一次基本动作——这一次是像通常那样从上面进行——得出了称为“猫眼”(cat's eye)的图形。以一种稍微不同的方式挑起图形并直接把手向后拉开而不要绕回来从下面进入中心,就得到“盘中鱼”(fish on a dish)这个图形。

最后一种图形就更难捉摸了。Bill用他的小指把中间的两根绳索拉开,并以通常的方式挑起绳子的交叉点。然后他使拇指和食指向内弯再向上弯,就得到第八种图形,名为“时钟”(clock)。

如果使用不同的步骤,那么就可以改变各图形出现的次序——例如,从猫眼直接变到蜡烛或者从士兵床直接变到猫眼。一种有效的挑绷子算法应当能解释所有这些游戏形式。例如,两个特定的步骤可能是“交换的”,也就是说,即使把它们执行的次序颠倒过来,也会得出相同的结果。此理论的目标应当是描述线绳图形的实际形状,而不仅仅是它们的拓扑特性。正确的第一步应当是为绳圈相对于手指的“位置”以及标准步骤制定一套紧凑的记号,比如“用左手的中指从右手挑起一个绳圈”等等。

仅靠一个人也可以作出有趣的图形。在建立挑绷子游戏的算法时,最好是从这种情况着手。为了说明各种可能的情况是如何丰富多彩,引人入胜,下面介绍一种名为“印度钻石”的图形(Indian diamonds),它开始时的步骤同一般的挑绷子游戏很相似,但不完全一样(见图2)。第一步是作好一个标准绳圈(1),然后用右手食指挑起穿过左手手掌心的那段绳子(2),并用左手食指重复这一动作(3)。接着,使两手的拇指向内相对弯下,并轻轻而稳定地把两手向外拉开,使绳圈从拇指上脱落下来。转动两手,使掌心向外。使大拇指向前穿过所有绳索的下方,让它们套在小指的绳子上,然后把双手转回来,把小指上的绳子拉向你(4)。这个操作过程听起来似乎有点玄妙,实际上是很自然的;如果你试一下,便会发现你挑起的那段绳子对这个方法来说是“显而易见”的。

接下来,用你的大拇指在拇指前面的那段绳子的上方穿过,然后穿过下一截绳子的下面,用拇指背把它们挑起来(5),就得到下面一个图形(6)。把小指弯下,然后把手慢慢拉开,就使绳圈从小指上脱落下来。这样所得的图形(7)相当错综复杂,但是由这一步出发以后就开始变得简单一些了。将小指向你的方向弯曲(如果你希望的话可以把手翻过来),并让小指从它们遇到的第一段绳子(从食指来)的上方穿过,再从它们遇到的下一段绳子(从拇指来)的下方穿过。然后使小指伸直(8)。

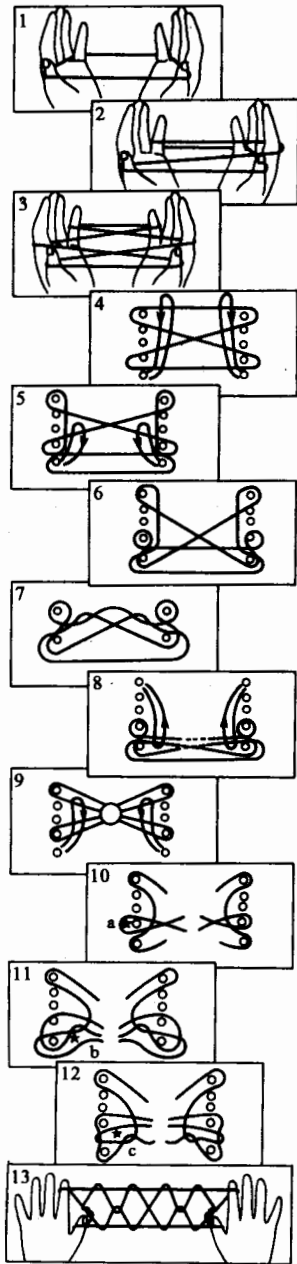


图2 “印度钻石”是可以只靠一个人作出的一系列图形。因此这种游戏的算法应当比传统的挑绷子游戏的算法更容易构造出来。图中的小圆圈表示两只手的手指，绳子就在这些手指间绕过来绕过去。操作的过程非常复杂(细节请看正文的说明)，但得到的图形则简单得出人意外

到这一步，每根拇指上就有了两个绳圈，你应当像先前那样使它们从拇指上脱下，把拇指空出来。在这一步之后，绳圈看起来简单得多了，只是中间出现了一个复杂的纽结，但这无关紧要。让拇指穿过在食指处构成一个环圈的两段绳子的上方，然后从套在小指的环圈的那根较近的绳子的下方穿过，再返回到出发点。此时你可能需要稍稍转动一下双手(10)。

下一步有点不同寻常。用右手的手指挑起 a 点上的绳子，把它向上挑，套在仅相隔几分之一英寸远的左手拇指上。然后对另一只手重复这一动作。注意挑起这段绳子后要使它经过从小指来与它交叉的那段绳子的上方。如果你正确地完成了这一步，你就得到(11)所示的图形——只是省略了中间那个复杂纽结的详细图形。

差不多就要完了。最后一步是做起容易说起难。弯下你的拇指使其互相对着，并让它们穿过标有 b 的孔，使靠近你的一侧向上升。接着把食指指向标有 c 的孔(12)。小心地把绳子从小指上脱下，平稳地向外转动你的手掌把绳子拉直。稍加练习，你应当得到(13)所示的图形——漂亮的“印度钻石”就展现在你的眼前了。



这两个例子只不过是接触了绳圈图形的一点皮毛而已。如果你希望了解更多的知识,请读读 Caroline F. Jayne 所著“绳圈图形及其创作技巧”一书。当代的拓扑学理论尽管具有惊人的能力,但还不能对付一种古老的儿童游戏,认识到这一点将会使我们放谦逊一些,不再那么自大。然而我强烈地倾向于一种猜测,即拓扑学的基本原理能够奋起迎接这一挑战。读者既可以接受这个挑战,发明挑绷子游戏的算法——也可以只是从这个游戏中取得乐趣,通过用一个简单的绳圈来创作出种种精巧的图形以磨炼你的数学细胞。