一种迷人的分形,它与一种名为“Sierpinski 垫片”的分形图案有关。把一个等边三角形分成四个小三角形,每一个的边长均为原三角形的一半,然后去掉中间那个倒立的小三角形,对剩下来的三角形进行同样的操作,如此反复进行下去,得到的就是 Sierpinski 垫片。纽约州立大学石溪分校的 Patrick Grim 和 Paul St. Denis 在题为“形式体系的分形图象”的论文中探讨了这种分形。

分形的特点是它可以分成许多较小的部分,而每一部分的形状都是整体形状的翻版。真正的分形——例如 Sierpinski 垫片——无论放大到什么尺度都仍然蕴含着无穷无尽的详细结构。它的任何一部分,无论是多么的小,其形状都和整体一模一样。而准分形则是近似于真正的分形的一种图形——它在很大范围的放大尺度上都显示出详细结构,但这一范围毕竟不是无穷大的。准分形的图形不能一直分解到无穷小的尺度上,但由于人眼无法区分这样微小的细节,因此准分形看起来仍然是非常逼真的分形。Grim 和 St. Denis 的成就之一就是设计出了一种代表三子棋所有可能棋局的准分

形图案。

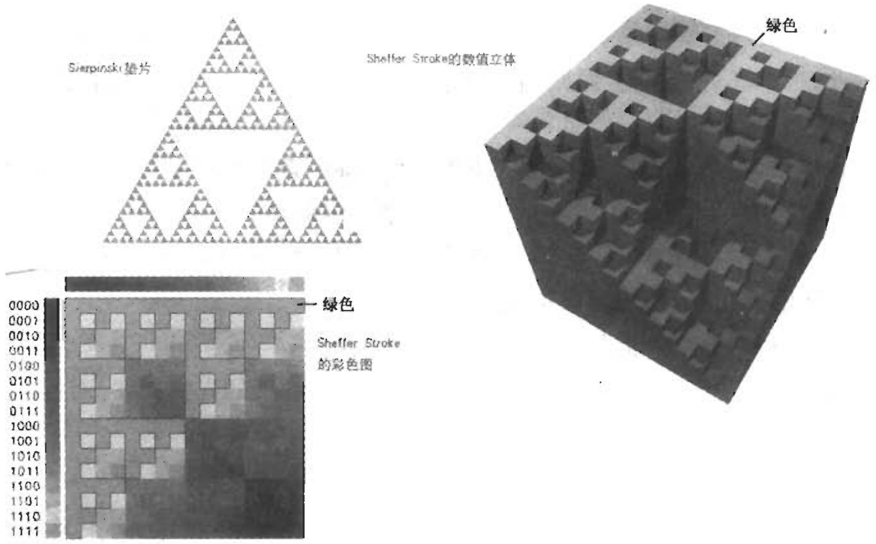

图 1　Sierpinski 垫片(左上图所示)可以用数理逻辑近似表示。将四位数的二进制数字填入 Sheffer Stroke 的真值表中,就得出一幅彩色图,其中的绿色方格构成一个与 Sierpinski 垫片相似的图形(左)。从 Sheffer Stroke 的数值立体中也可以看出该图案。

众所周知,三子棋(tic-tac-toe)是由两个人(姑且称为 X 与 0)在 3×3 方格网上玩的一种游戏。两位游戏者轮流在方格内作标记,先作出排成一行的三个标记(可以是在横、竖或对角方向上排成一行)的一方为胜者。传统上由 X 走第一步,而最优的走法最终总是得到平局。但是究竟有多少种可能的走法呢? 当 X 走第一步时,他可以从 9 个方格中任选一个,然后 0 从剩下的 8 个方格中任选一个,如此类推。因此三子棋走法的总数为 $9!=9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=362880$ 种。

Grim 和 St. Denis 构建他们的准分形图案的方法如下。开始时画一个大的 3×3 方格网,然后把其中每一个方格再分成一个 3×3 的子方格网(见图 2)。游戏者 X 在开局时可以有 9 种走法,对应于大方格网中的各个位置。其中一种走法是 X 在左上角的方格中作上标记。找到大方格网左上角方格中的 3×3 子方格网,并在子方格网左上角的方格中画一个"×"。现在这个子方格网就是开局第一步之后棋局的图案了。另一种开局的走法是 X 选择中下的方格。为了表示出这一步走法,找出大方格网中

下方格中的 3×3 子方格网，并在子方格网中下的方格中画一个“×”。这样，9 个子方格网中的每一个都画上了×，但画在不同位置的子方格内。

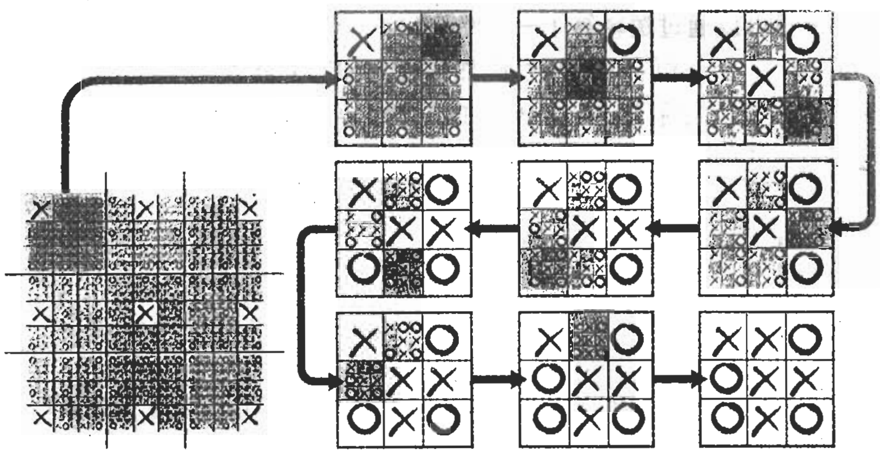

图 2　三子棋所有可能的棋局可以用一个准分形图案来表示。把 3×3 方格网中的各个方格划分为更小的方格网，并把开局的所有可能走法画在这些方格网内(左)。把空着的方格进一步划分成更小的方格网，就可以把随后的各种走法画进这些方格网中。依次把这一图案的各部分放大，就显示出一盘三子棋的全过程(右)

现在我们把注意力集中在大方格网左上角的那个子方格网。游戏者 X 走的第一步已经画在了左上角的子方格内，另外 8 个子方格则代表游戏者 0 的 8 种可能的走法。不过，如果我们在这 8 个子方格中全都画上“0”，那么游戏者 X 走第二步时他的×就无处可放了。因此我们把先前开局那一步所用过的方法再重复一次；我们把 8 个未作标记的子方格全部再划分为 3×3 子子方格网，这样就得到 8 个更小的三子棋棋盘。我们在每个小棋盘左上角方格中画一个×，代表 X 开局时的走法。然后我们在每一个小棋盘中画上 0 的 8 种可能走法中的一种走法。

像这样反复进行下去，就可以把三子棋的所有可能的走法记录在越来越小的子方格网中。每一步都是把所有还空着的方格划分成 3×3 方格网，同时把这一步之前的所有走法记入这些方格网的方格中。最终所得的图形具有准分形的结构，因为游戏的规则是递归的：每一步上的可能的走法由先前所走的各步决定。分形的几何图形也是递归的，即相似的图形在越来越小的尺度上反复出现。三子棋图案是准分形而不是货真价实的分形，因为这个游戏经过有限多步后将结束。

现在我们转向逻辑的问题。传统数理逻辑中最简单的一个领域是命题演算,这个领域研究的是各种陈述。陈述的"真值"为 1 时表示陈述为真,而真值为零时表示陈述为伪。例如,陈述 P="猪会飞"的真值为 0,而陈述 Q="非洲是一个大陆"的真值为 1。若干个陈述可以通过逻辑算子——例如"与"(AND)和"或"(OR)——组合起来。假设 P 和 Q 是如上所述的两个陈述,则陈述"P AND Q"就表示"猪会飞,而且非洲是一个大陆。"这个陈述是假的,因此 P AND Q 的真值为零。把算子 AND 运用于陈述所得的结果可以用下面这张真值表来概括:

P	Q	P AND Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

运用算子"非"(NOT),也可以把 0 变成 1,而把 1 变成 0,也就是说,如果 P 为伪,则 NOT P 为真。反之亦然。

对于两个陈述,有 16 种可能的真值表,分别表示把 0 和 1 放进真值表的最末一列的所有各种可能的方式。我们可以用连续排列的四位二进制数字——即 0000,0001,0010,0011 等等,直到 1111——来表示这些方式(在十进制中上述数字分别表示 0,1,2,3…,15 等)这样就可以得出另外一种准分形。为了画出它的图案,先作一个 16×16 的方格网,在其最上面一行的上方再添一行方格,沿着这行方格把每一列方格都标以一个二进制数字(见图 1)。然后在方格网的左侧也加上一列类似的方格,沿着这一列方格把每一行方格都标以一个二进制数字。选择 16 种不同的颜色来代表 16 个不同的二进制数字,并给上述边界方格涂上相应的颜色。然后选择一个逻辑算子,例如 Sheffer Stroke,它用符号 | 表示。在计算机工程中,Sheffer Stroke 被称为"与非"算子(NAND),因为 P|Q=NOT(P AND Q)。它的真值表如下:

P	Q	P|Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

然后,把 16×16 方格网中每一个方格所在行的编号的四个二进制数字填入 P|Q 真值表的第一列中,同时把该方格所在列的编号的四个二进制数字填入 P|Q 真值表的第二列中。接着进行 NAND 运算,并把得出的真值填入 P|Q 真值表的最后一列

中。这样就产生出另一个四位数的二进制数。找出与这个数相对应的颜色，并用它来给 16×16 方格网中相应的方格着色。例如，试考虑方格网第 5 行、第 11 列上的那个方格。5 和 11 的二进制表示分别是 0101 和 1011。把这两个数字填入 P|Q 的真值表中就得出下面的结果：

P	Q	P|Q
0	1	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

最后一列中的二进制数字是 1110，相当于十进制数的 14。因此我们把方格网的第 5 行、第 11 列上的方格涂成与 14 这个数相对应的颜色。

图 1 示出了这项费力的工作所得出的最终结果。注意绿色的方格——这些方格对应于二进制数字 1111——构成了一个与 Sierpinski 垫片极为相似的图形！我们也可以不用彩色来对这幅图编码，而是把每个方格中的数值绘成一幅三维的图形，也就是把每个方格中的二进制数换算为十进制数后除以 16，并把所得的结果作为这个方格的“高度”。例如，第 5 行、第 11 列上的方格的高度为 14/16＝0.875。这些图形称为“数值立体”(value solid)。在 Sheffer Stroke 的数值立体中，可以清楚地看出一个与 Sierpinski 垫片相似的图形。这一现象很容易解释：任何一个与递归有关的形式逻辑体系——无论是游戏还是真值表——都可以提供一种画出准分形的方法。