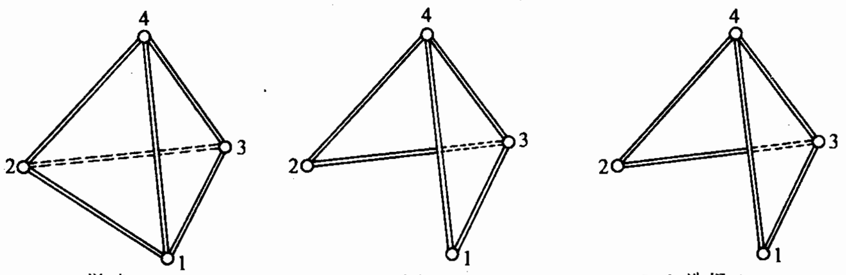
子集的策略

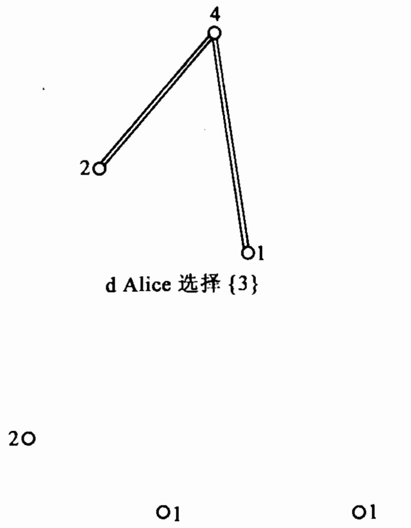
通过游戏和难题来解释数学道理的传统作法可以追溯到古代巴比伦人。他们把让人大伤脑筋的算术难题写在粘土板上。不过，最近几年来，数学的迅速进展导致一大批全新游戏的问世。加利福尼亚大学的 David Gale 就发明了这样的一个游戏。该游戏综合了集合论与拓扑学的概念。游戏数学家们将会发现，这个游戏特别令人感兴趣的地方在于，至今还没有任何人确定它的获胜策略。

首先我们来简短地回顾一下有关集合论的概念。所谓集合就是某类明确规定了的物体的总合，而一个集合内的物体就称为这个集合的元素。如果某一集合有有限个元素，我们就可以用括号把它们一一列举出来。例如，{2,3,5,7}是小于 10 的所有素数的集合。如果集合 X 的每个元素都是集合 Y 的一个元素，则集合 X 就是集合 Y 的一个子集。例如，小于 10 的所有奇素数的集合{3,5,7}就是集合{2,3,5,7}的一个子集。如果集合 X 的一个子集与 X 不同，则它就称为 X 的“真”子集。集合可以只有一

个元素，例如，{2}这个集合是所有偶素数的集合，它只有一个元素。一个集合也可以没有任何元素，在这种情况下我们称其为空集。



a 游戏开局　　b Alice 选择 {1, 2}　　c Bob 选择 {2, 3, 4}



e Bob 选择 {4}　f Alice 选择 {2}　g 从而赢得游戏！

图 1　“选子集”游戏可以用拓扑方法表示。游戏的开局为一个四面体(a)。两位游戏者 Alice 和 Bob 轮流选择子集，在这一过程中四面体的各部分一步一步地去掉，直至一点也不剩(从 b 到 g)。

Gale 的游戏称为“选子集”(Subset takeaway)。游戏开始时有一个有限集合 S，我们假定它就是从 1 到 n 的整数集合{1,2,…,n}。每位游戏者轮流选择 S 的一个非空子集，其条件是：每当选择一个子集时，先前所选择的任何一个子集(不论是哪位游戏者选的)不能是这个新子集的子集。第一位无法找出这样一个子集的游戏者算输。这个游戏的实际操作方法如下。在一张纸上画出若干列，各列顶端分别标以 1,2,3,…,n 等数字，游戏者选定某一子集后，就在相应各列中画出一行十字。按照上述规定，合法的每一步不能包括先前某一步所选的所有十字。

按照惯例，我们把两位游戏者分别称为 Alice 和 Bob，并由 Alice 先选子集。当 n=1 时，这个游戏不存在合法的选法。当 n=2 时，初始集合就是 S={1,2}。Alice 开局时面临的选法只有选{1}或{2}。无论她选哪一个，Bob 都可以选另一个。这样 Alice 就走投无路了，因此 Bob 赢得游戏。

如果 n=3，开局的集合为 S={1,2,3}，那么游戏就变得更有趣了。假定 Alice 选择有两个元素的子集，比如说{1,2}。然后 Bob 可以选择一个补子集——也就是把 Alice 没有选的全囊括进来。在本例中 Bob 选的这个补子集就是{3}。接下来 Alice 就不能选择任何包含 3 的子集了，因此她必须选择{1,2}的一个子集。从这一步开始，游戏的进行就跟开局集合为{1,2}时完全一样了。因此这次又是 Bob 赢得游戏。如果 Alice 第一步选择另外任何一个有两个元素的子集，则游戏的结果完全一样 Alice 非输不可。但是 Alice 在开局时还有另外一种选法：她可以选只有一个元素的子集，例如{3}。但如果 Bob 选择补子集{1,2}，那么游戏又变得跟开局集合为{1,2}时完全一样了，因此 Bob 仍然赢。由于 Alice 在开局时必须选有一个元素的子集或者有两个元素的子集，Bob 可以找到一条致胜之道：他可以以不变应万变，不论 Alice 选哪个子集，他都选这个子集的补集，这样就保证了他包赢不输。读者们在看下去之前可能想要自己来考虑一下当 n 大于 3 时同样的策略是否还能让 Bob 战无不胜。

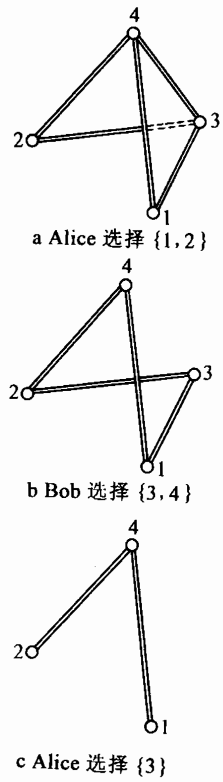


图 2　在图中所示的这个选子集游戏中，互补策略失灵了，因为在 Alice 走了第二步之后，Bob 就不能选择与其互补的子集(C)

现在我们来看看拓扑学(有时拓扑学被说成是橡皮几何学)。我们运用拓扑学中的一种基本方法来建立“选子集”游戏的几何表示。这种方法就是把图形“三角化”，也就是把它分成若干个互相共边的三角形。严格地说这一描述只能用于平面图形，但是，如果我们用一类广义图形称为“单形”(simpex)来代替三角形，则同样的原则也适用于高维空间的情形。例如，三维空间中的单形(3-单形)就是四面体。四面体有四个面、六条棱和四个顶点。四面体的各面均为三角形(按照这一命名规则，三角形应称为 2-单形)，棱

是线段(1-单形),顶点是点(O-单形)。此外,这个3-单形的各个部分正好对应于{1,2,3,4}的各个子集。四面体本身对应于整个集合{1,2,3,4}。各面对应于有三个元素的子集{1,2,3}、{1,2,4}{1,3,4}和{2,3,4)。各棱对应于有两个元素的子集即{1,2}、{1,3}{1,4}、{2,3}、{2,4}和{3,4}。各顶点则对应于只有一个元素的子集即{1},{2},{3}和{4}。

事实上,任何一个(n-1)-单形均可等价于集合{1,2,3,…,n},而它的各个低维组成部分则分别对应于该集合的真子集。现在我们可以把“选子集”游戏重新表示为“擦单形”游戏。游戏开始时有一个单形,而游戏的每一步就是选择一个任一维的真子单形并把它的内部连同所有包含它的更高维数子单形的内部都擦掉。但是要注意,这一过程并不是把所选定子单形的边界擦掉,例如三角形面的三条边和一条边的两个端点等。

我们可以运用这一表示方法来分析3-单形的擦单形游戏(它对应于n=4的选子集游戏)。游戏开局是一个完整的3-单形,即一个正四面体。图1示出一系列符合规则的擦法。系统地分析了所有这些擦法后我们可以证明,当n=4时Bob可以永远赢得游戏。n=5和n=6时的情况也是一样。Gale猜测,不论n取什么样的值,Bob总有致胜之道。这一猜测至今既未被证明,也没有被推翻。

那么当n=4,5,6以及比6更大的值时,Bob的致胜秘诀是什么呢?他是不是应当始终同Alice对着干,也就是总选Alice所选子集的补子集呢?(当n=3时,这一策略保证了Bob战无不胜。)当n=4时,Alice第一步可以选择一个顶点、一条边或者一个三角形面。如果她选择一个顶点,而Bob选择其补子集,则游戏就变成了n=3的情形,因此Bob肯定获胜。如果Alice选择了一个三角形面,而Bob选择了与此面互补的顶点,则游戏又变成了与上面同样的局面,仍然是Bob获胜。但是,如果Alice选择一条边——比如说与{1,2}对应的那条边——而Bob选择与其互补的一条边,即{3,4},情况又会如何呢?

图2示出了随后发生的情形。如果Alice选择{3},则Bob就不能选择与其互补的子集{1,2,4},因为这是游戏规则所不允许的。(用单形的术语来说就是,这个三角形面已经被擦掉了。)这样,选补子集的策略就失灵了。有的数学家猜测,无论n为何值,对于Alice开局的选法,Bob都应当选其互补的子集来作为回敬。但是,在第一步以后,他可能就不得不放弃这种与Alice对着干的选法了,正如我们刚才已看到的那样。

那么,倒霉的Alice情况又如何呢?是不是在无论哪种选子集游戏中,Bob总是能赢Alice呢?对于n=7,8或其他较小数值的情形,计算机搜索可能会证明或推翻这一

假设。但是,对于更大的 n 值,证明这一猜想就需要有新的方法了。