组合几何学是最富有魅力的数学分支之一，其中看似简单却至今找不到答案的问题比比皆是。这些问题的目标是要设法找出线段、曲线或其他几何图形的适当排列方式，以便能够最有效地实现某一目的。本文主要讨论一个名为“不透明正方形问题”(Opaque Square Problem)的几何难题，顺便也谈谈它的几个饶有趣味的变种。

假定你拥有一片正方形的土地。为简单起见，我们假设它每边长为 1 英里。为了确保你享有隐私，你打算建造一道不透明的围墙，也就是一道可以挡住任何穿越这块正方形地的视线的屏障。而且，为了省钱，你希望围墙越短越好。你应当如何建造围墙呢？围墙的复杂程度不受任何限制，你想要多复杂就可以有多复杂。它可以分成若干段，各段既可以是弯的，也可以是直的。

对于这个问题，最一目了然的答案可能就是绕着这块正方形地皮的四周建造一道围墙，其总长为 4 英里[见图 1 的 A]。稍微思考一下后可以想出一个改进方案，也就是空出一条边不建围墙，而在另外 3 条边上建起围墙，这样就形成一道有两个垂直转角的 U 型围墙[见图 1 的 B]。改进后的围墙总长缩短到 3 英里。事实上，如果我们规定一个附加条件，也就是围墙必须是单条多角形线或曲线，那么 3 英里就是围墙的最短长度。原因何在呢？这是因为，每一道不透明的围墙都必须占住正方形的四个角，而有 3 条边的 U 型围墙就是占住所有 4 个角的最短的单条曲线。

但是我们也可以建造长度更短的围墙，不过它必须由一条以上的曲线构成。图 1 中的 C 显示了一道长度为 $1+\sqrt{3}$(约为 2.732)英里的围墙，其中各条线段之间的夹角全部为 120 度。这样一类图形称为斯坦纳树(Steiner tree)；120 度的角使树的总长为最小。如果我们要求围墙的各段必须互相连接的话，那么这就是最短的围墙了。但是，如果可以把围墙分成互不连接的若干段，那么围墙的总长还可以削减到 2.639 英里[见 D]。D 图上半部分的 3 条线段也是彼此形成 120 度的夹角。现在人们普遍认为这最后一个例子就是正方形地皮的最短的不透明围墙，但至今还没有人证明这一点。

事实上,数学家们甚至不能肯定是否存在一道最短的不透明围墙。有可能出现这样一种情况,即随着围墙的结构越来越复杂,围墙的长度也将不断缩短。已经证明,对于由给定数目的互相连接的各段构成的围墙,长度最短的不透明围墙总是存在的。但是,当围墙的段数不受限制地增加下去时,段的最小长度是否会不断减小的问题,以及由无限多段组成的围墙的长度是否比所有段数有限的围墙的长度都短的问题,至今尚未找到答案。这两种可能性似乎难以成立,但都没有被排除。

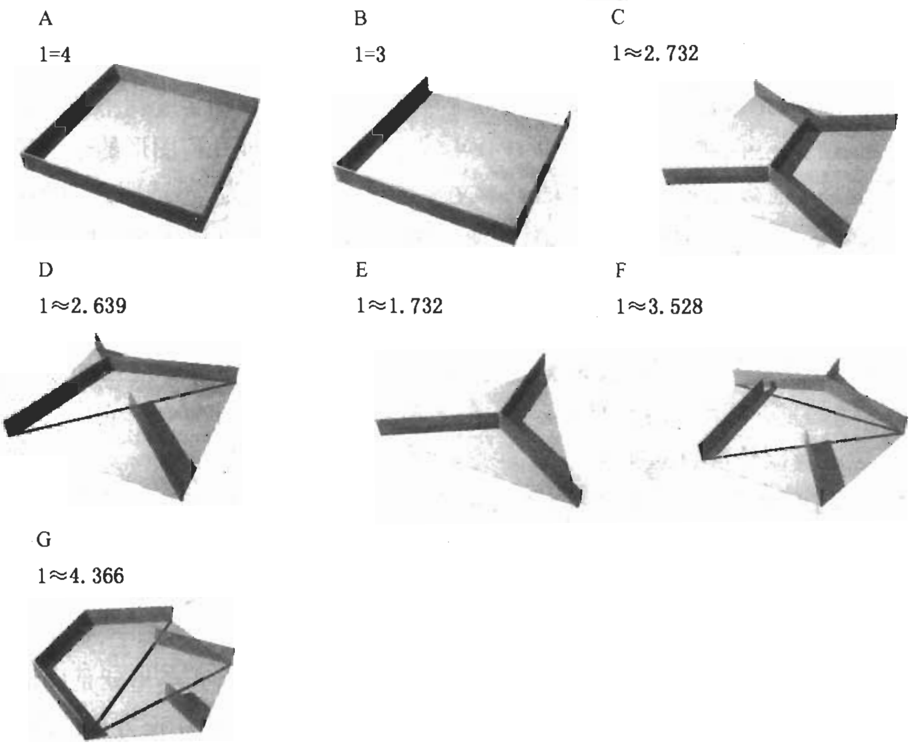

图 1 不透明围墙就是可以挡住穿过某图形的任何一条视线的屏障。对于正方形来说,沿其四周建起的一道围墙(A)以及有 3 条边的 U 形围墙(B)均是不透明的,但是斯坦纳树(C)以及由两部分构成的一道围墙(D)其长度更短。等边三角形的最短的不透明围墙也是斯坦纳树(E)。正五边形(F)正六边形(G)的已知的最短不透明围墙均由 3 段组成。除了 A 与 B 外,图中示出的其他围墙长度(I)均为近似值

对于图 D,德国科隆的 Kawohl 提出了一个漂亮的证明:该图所示的围墙就是恰好由两段组成的围墙中最短的一种。他证明了其中一段必定占住正方形的 3 个角,而另

一段则必须占住剩下的那一个角。因此,第一段必定是把3个角连接起来的最短的斯坦纳树,它的形状如该图的上半部分所示。把这段围墙包起来的"凸壳"是沿着正方形的一条对角线将正方形切开后所形成的三角形,它是包含此图形的最小凸区域。围墙的第二段必定是把正方形的第4个角同上述三角形连接起来的最短曲线,也就是从那个角通向正方形中心的对角线。

正方形以外的其他形状情况又如何呢?如果这片土地是一个等边三角形,那么最短的不透明围墙就是沿着直线把三角形的每个角与三角形中点连接起来后所形成的斯坦纳树[见图E]。如果这片土地呈正五边形,那么已知的最短不透明围墙由3段组成[见图F]。其中一段是连接正五边形3个相邻顶点的斯坦纳树。第二段是把第4个顶点与上述斯坦纳树的凸包壳连接起来的一条线段。第三段则是把第五个顶点与其余4个顶点的凸包壳连接起来的一条线段。还没有人证明这样一道围墙具有最短的长度,但是至今人们也没有找到比它更短的围墙。

正六边形的已知的最短不透明围墙与此类似[见图G]。由于正六边形的每个内角为120度,因此斯坦纳树由正六边形本身首尾相连的三条边组成,这三条边把正六边形4个相邻的顶点连接起来。围墙的第二段则是把正六边形的第5个顶点与上述斯坦纳树的凸包壳连接起来的一条最短线段,而第三段则是把正六边形第6个顶点与另外5个顶点的凸包壳连接起来的最短线段。对于正六边形,同样没有人证明上述围墙就是长度最短的围墙。

对于任何有偶数条边的正多边形,读者可以用类似的作图方法画出一道假想的最短围墙[见图2中的H]。用一条连接此多边形相对的两个顶点的直径将它分成相等的两半。围墙的第一段就是由其中一半内的所有各边组成的,它形成一个状似半圆的多边形。围墙的第二段则是将多边形的下一个顶点与上述第一段的凸包壳连接起来的最短线段。围墙的第三段则是把多边形的再下一个顶点与头两段的凸包壳连接起来的最短线段,如此类推。

边数很多的正多边形非常像一个圆。那么,使一个圆不透光的最短围墙具有什么样的形状呢?为简单起见,假定该圆的半径为1英里。人们马上能够想出的最简单的围墙就是绕着这个圆的周围的一道墙,其长度为2π(约6.283英里)。不过,如果允许把围墙建在这片圆形土地以外的话,那么围墙的长度还可以更短。首先沿着这个圆的一半圆周立起围墙,这样就形成一段半圆形的围墙,然后在此半圆围墙的两端各接一段长度为1英里的直线形围墙,并使它们与圆相切。这样就得出了一道U形围墙,其长度为$\pi+2$(约5.142)英里。

我们可以证明，如果我们仍然要求围墙必须是单独的一条曲线——也就是整个围墙形成一体，不能有分叉点——那么上述围墙就是一片圆形地皮的最短不透明围墙。表述这个问题的另一种方法就是用壕沟来代替围墙。想像有一根直的地下管道在距某点 1 英里以内的地方经过。那么，为了找到这条管道，我们需要挖掘一条长度最少为多少英里的壕沟呢？我们知道，这根管道必定穿过以该已知点为圆心、半径为 1 英里的一个圆，因而必定也会碰上该圆的任何一道不透明围墙。所以我们应当按照一道不透明围墙的路线来挖出壕沟。

在这种类型的谜题中，很自然应当允许壕沟延伸到该圆的范围之外。然而，围墙通常都建在其所有者的土地上，而不会建在邻居的土地上。可以证明，完全建在圆形土地内的不透明围墙，其长度也不能大于 $\pi+2$ 英里。证明方法是考虑一个偶数条边的正多边形的假想围墙。如果这个正多边形的边数非常大，它就可以近似当作一个圆。作一点三角计算即可证明，当正多边形的边数趋于无穷时，图 H 所示的围墙其长度便趋近于 $\pi+2$ 英里。

H

当 $N \longrightarrow \infty$ 时

$l_N \longrightarrow \pi+2$

I

$l=\pi+2$

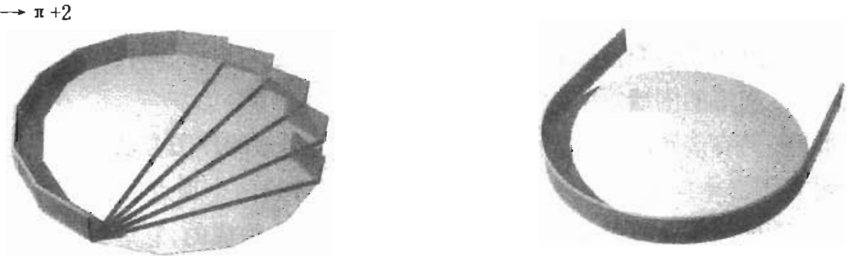

图 2　有多条边的偶数边正多边形其围墙由许多段组成(H)。它们的总长度近似于圆的最短单曲线围墙的长度(I)

但这些假想围墙是否真的就是最短的围墙呢？是不是还可以找到一种方法把它们再缩短一些呢？对于其他种种图形，例如不规则多边形(凸的或非凸多边形)、椭圆及半圆等，情况又如何呢？同样的问题推广到三维空间(不透明立方体、不透明球等)，又会怎么样呢？游戏数学爱好者们要研究的东西还真不少。