古代日本寺庙中的趣味几何学问题

在世界各地数不胜数的各种习俗和传统中，或许没有一种比得上日本的寺庙几何学这一传统那样绝妙，那样精美。在日本的闭关锁国时代(1639年到1854年)，日本处于一种与西方世界彻底隔绝的状态中。与所有各种形式的西方文化的接触均受到日本当权者的压制，西方科学思想的流入实际上被切断了。在这段时期中，一类土生土长的数学曾在日本崛起并获得了高度的发展。

当时，一些爱好数学的人——包括武士、商人和农夫等——常常求解各种各样的几何问题，把他们的成果刻在色彩精致的木制书板上并悬挂于寺庙的屋顶下。这些所谓“算匾”(在日文中此词的字面意义就是数学书匾)可能是表示敬意的行动(感谢指点迷津的神灵)，也可能是对其他进庙朝拜者的公开挑战：有本事的话就把它解出来。

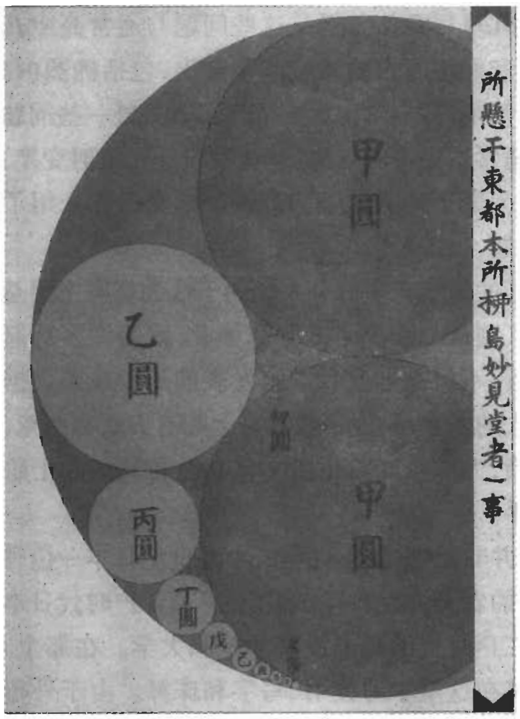
大部分算匾涉及的都是通常的欧几里得几何。但是这些问题与通常高中几何课程中的问题明显不同。这些问题中圆和椭圆所占的地位非常突出，包括椭圆内套圆、圆内套椭圆等等。其中有些问题非常简单，高一学生也能解出来。另外一些问题用初等方法几乎无法对付，现代数学家们通常用高等的方法(包括微积分和仿射变换)来求解它们。大多数这类问题在今天可认为属于趣味数学的范畴。本文后面介绍了若干例相当有趣而又有一定难度的算匾问题，供读者们思考。

关于算匾的起源，存在着两种不同的观点。一部分人倾向于认为算匾主要是专业数学家及其学生们创作的，但另一些人则认为情况可能并非如此，因为许多算匾问题都属于初等数学，其解法只有寥寥数行，不像是专业数学家发表的那类成果。据研究人员考证，一块算匾上刻的是一位商人的名字，其他一些算匾上则有妇女和儿童(年龄在12到14岁之间)的名字。他们推断，大多数算匾是由文化程度较高的武士阶层成员创作的，少数算匾可能出自农夫之手。

农夫研习几何问题在当时的日本并非咄咄怪事。例如，十九世纪日本一位著名数学家曾在他的乡间故居向附近村庄中的农夫讲授和算知识(和算是江户时代日本特有的算学)。他的学生多达两千余人。江户时代的日本没有学院和大学。在那个时期，教育是由私立学校或寺庙承担的，平民在这里学习读书、写字和珠算。由于外行人对几何问题的兴趣比对代数问题大，因此这些算匾以极高的艺术水平精致地绘制出来以吸引非数学家的注意就不是什么出人意料的事了。

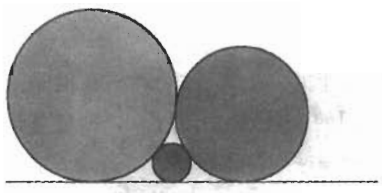
因此可以说，对于“谁创造了寺庙几何学?”这个问题，最好的答案或许是“所有的人”。在那个时期，许多日本平民都喜欢数学、诗歌以及其他形式的艺术，并从中领略到极大的乐趣。情况可能是，一位乡村教师在教了一整天的书以后，或者是一位武士在把他的剑磨锋利之后，将躲进他的书房，点亮一盏油灯，忘掉世上的一切，全神贯注地投入一个涉及球和椭球的复杂数学问题中。或许他将用好几天的时间安安静静地冥思苦想这个问题。当他最终找到答案后，他或许会短暂地休息一下，欣赏自己的艰苦劳动所获得的成果。他相信这一证明值得奉献给他所崇拜的神灵，因此把这个定理刻在木板上，悬挂于当地的寺庙中，然后开始考虑下一个挑战。前来参拜寺庙的人将会注意到这个色彩鲜艳的算匾，并对它的精美赞叹不已。许多人在离去时可能会想，不知算匾的作者是怎样找到这一奇妙的答案的。有些人可能决定尝试 一下解这个问题，有些人则打算钻研几何学以便能进行这种尝试。还有少数人可能会这样想，“如果把问题改成这样又如何呢……”

这真是值得我们所有人思索的奥秘。



问题 1

如图所示为一个多重圆内套圆的问题。假设最大圆的半径为 r，问题是要用 r 表示从“初圆”到“末圆”这一系列圆中第几个圆的半径。注意两个“甲圆”的大小相同，其半径各为 $r/2$。（提示：“戊圆”和“己圆”之间的那个圆（此时 $n=5$）的半径为 $r/95$。）这个问题最初的解利用了日本式的笛卡尔圆定理（此问题解答请看本文后面）。

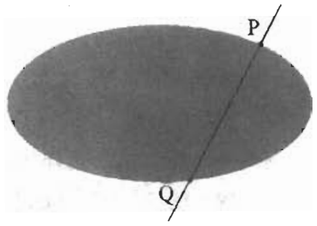


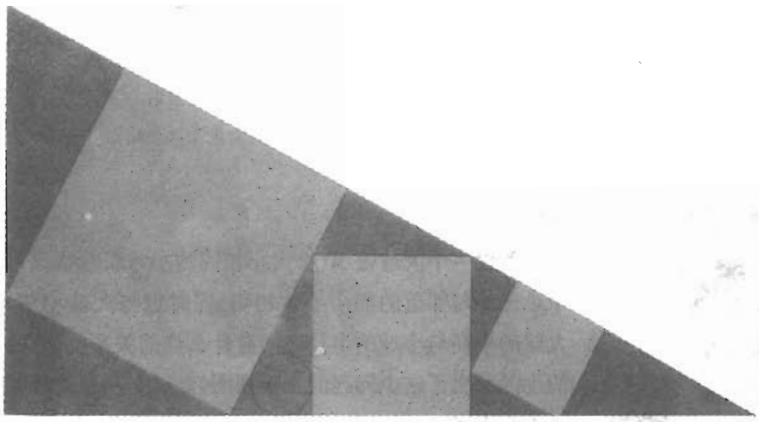
问题 2

1824 年群马县的一块书板上记载的一个简单的问题流传至今。图中的两个大圆外切于某一点，而且它们还与同一条直线相切。小圆既与两个大圆外切，也与那条直线相切。这三个圆的半径有什么样的关系？

问题 3

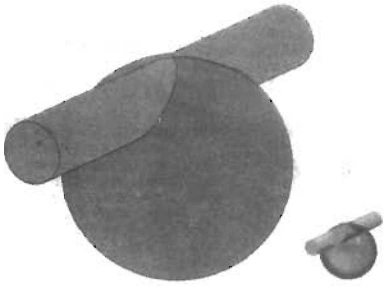
这个引人注目的问题是 1912 年写在现存于宫城县的一块书板上的。问题本身起源于何时则无人知道。从椭圆上一点 P 作法线 PQ，与椭圆另一侧相交于 Q 点。试找出 PQ 的最小值。初看起来这个问题似乎再简单不过了：长度最小的 PQ 应当是椭圆的短轴。事实上，如果 $b < a \leqslant \sqrt{2}b$（这里 a 和 b 分别为椭圆的长轴和短轴），则短轴确实是这个问题的解。然而上述书板并没有给出这个解，而是给了另一个解——当 $2b^2 < a^2$ 时这个问题的解。





问题 4

下面这个巧妙的问题写在宫城县 1913 年的一块书板上，它只需要高中几何学的知识便可解决。如图所示，在大的直角三角形内画有三个正方形，试问三个圆的半径之间有何关系？

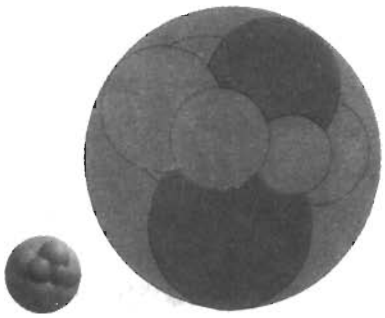


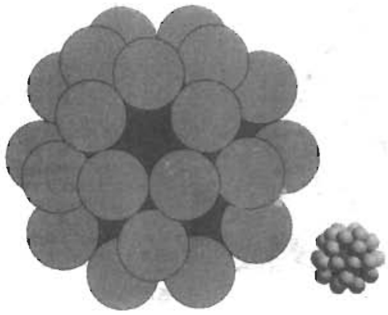
问题 5

这个问题来自1825年的一个算匾书板，它可能是运用“圆理”（即日本式圆的定理）解出的。一个圆柱与一球面相交，圆柱的外侧与球的内侧相切。问题是要求出被包含在球的内部的那一部分圆柱的表面积（下面的小图示出了这个问题的三维视图）。

问题 6

这个问题载于神奈川县的一块1822年的书板。它比著名的英国化学家F. 索第提出的一个定理早了一个多世纪。（索第同恩内斯特·卢瑟福一起发现了元素的嬗变。）两个球互相外切，同时均内切于大球。若干个较小的、尺寸不同的球连成一圈，围住这两个球之间的“颈部”。这个“项圈”中的每一个小球都同最靠近它的小球相切，同时所有的小球也与两个中球及那个大球相切。小球必须有多少个？此外，这些蓝色球的半径之间有何关系？（下面的小图示出了这个问题的三维视图。）

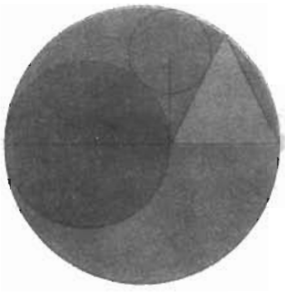




问题 7

假设一个大球被30个大小相同的小球所包绕。每个小球都与邻近的四个小球相切，同时也与大球相切。大球的半径与小球的半径之间有什么样的关系？（下面的小图示出了这个问题的三维视图）。以上问题的答案见本文末尾。

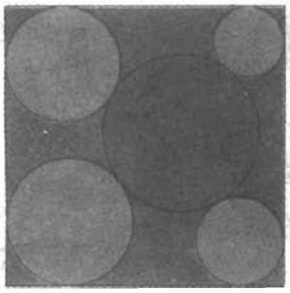
问题 8



这个问题来自群马县发现的一块 1803 年的算匾书板。一个等腰三角形的底在图中所示的大圆的一条直径上,该直径同时把另一个圆平分成两半。此圆内切于大圆,并经过等腰三角形的一个顶点,如图所示。里面的两个圆和等腰三角形外切,并内切于大圆。一条线段把小圆的圆心以及中圆与等腰三角形的交点连接起来。试证明这条线段垂直于图中所示的大圆的直径。

问题 9

这个问题来自群马县的一块 1874 年的书板。一个大圆位于一个正方形的内部。四个半径各不相等的小圆与这个圆外切,同时各与正方形的两条邻边相切。四个小圆的半径与正方形的边长之间有什么关系?(提示:这个问题可以用 Casey 定理来解决。该定理给出了与另一个圆相切或与一条直线相切的四个圆之间的关系。)

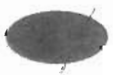


算匾问题的答案

遗憾的是,由于篇幅有限,我们不可能给出这些问题的完整答案。读者如欲了解更多的细节,可查阅《科学美国人》的万维网网点:http://www.sciam.com.

答案:$r/[(2n-1)^2+14]$。这个问题最初的解法是把日本式的笛卡尔圆定理反复用几次。这里给出的答案是用反演法得出的。那个时代的日本数学家还不知道这个方法。

答案:$1/\sqrt{r_3}=1/\sqrt{r_1}+1/\sqrt{r_2}$,其中 r_1、r_2 和 r_3 分别是橙色圆、蓝色圆和红色圆的半径。这个问题可以运用毕达哥拉斯定理(勾股定理)来解出。



答案:$PQ=\dfrac{\sqrt{27}a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}$

这个问题的解法是,运用解析几何得出 PQ 的方程,然后取该方程的一阶导数并令其等于零,以求得 PQ 的极小值。现在还不知道算匾最初的作者是否运用了微积分学来解出这个问题。

答案:$r_2^2=r_1r_3$,其中 r_1、r_2 和 r_3 分别是大、中、小三个蓝色圆的半径。(换句话说,r_2 是 r_1 和 r_3 的几何平均。)在求解这个问题时,首先要注意到橙色的正方形所形成的所有绿色小三角形都是相似的。接着,最初的解法就考虑三个正方形之间有何关系。

答案:在这个问题最初的解法中,作者画了一条线段穿过蓝色圆的圆心并垂直于绿色圆的已示出的那条直径。然后作者假设这条线段与正文中这个问题所提到的那条线段不同,因此这两条线段将与图中示出的绿色圆直径交于不同的点上。接着作者证明了这两个点之间的距离必定为零——也就是说,这两条线段必定是合而为一的,从而证明了该线段垂直于那条直径。

答案:设 a 为正方形的边长,r_1、r_2、r_3 和 r_4 分别为右上角、左上角、左下角和右下角的橙色圆的半径,则有:$a=\dfrac{2(r_1r_3-r_2r_4)+\sqrt{2(r_1-r_2)(r_1-r_4)(r_3-r_2)(r_3-r_4)}}{r_1-r_2+r_3-r_4}$

答案:$16t\sqrt{t(r-t)}$,其中 r 和 t 分别为球与圆柱的半径。

答案:6 个球。根据 Soddy 六球定理,必定有 6 个蓝色球,而且只有 6 个蓝色球(因此这个定理得了“六球”之名)。有趣的是,无论第一个蓝色球在“颈部”的什么位置上,这个定理均成立。另外一个有趣的结果是,“项圈”中的不同的蓝色球的半径(t_1 到 t_6)有下列关系:$1/t_1+1/t_4=1/t_2+1/t_5=1/t_3+1/t_6$。

答案:$R=\sqrt{5}r$,其中 R 和 r 分别是大球和小球的半径。在求解这个问题时,要注意到每个小球的球心均位于一个正十二面体的各条棱的中点上(正十二面体是有十二个面、每面均为正五边形的多面体)。