4.2 三只鸽子两个窝

三只鸽子出去觅食,晚上归巢栖息,它们共有两个窝,显然必有一个窝里至少住有两只鸽子,不然,即使每巢一只鸽子,还有一只鸽子不能回巢。一般而言,对于自然数 n, $n+1$ 只鸽子住在 n 个巢中,至少有一巢里不少于两只鸽子。

这一结论称为鸽笼原理或抽屉原理。

把 m 本书放入 n 个抽屉, $m>n$,至少一个抽屉里放了多于 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 本书,其中 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 表示 $\frac{m-1}{n}$ 的整数部分。当 $m=n+1$ 时, $\left[\frac{m-1}{n}\right]=1$,即 $n+1$ 本书放入 n 个抽屉,至少一个抽屉里放不少于两本书。

事实上,若每个抽屉里放的书都不超过 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 本,则总的本数不超过 $n\cdot\left[\frac{m-1}{n}\right]\leqslant n\cdot\frac{m-1}{n}=m-1$,与共有 m 本书矛盾。所以一定是有的抽屉里放了多于 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 本书。

就是这么一个几乎不证自明的道理却能解千种难题,有万般应用。

下面是一些应用鸽笼原理的生动实例。

①某军弹药库每天需一个班保卫，保卫排六个班，一周内至少有一个班出勤两天。

②13 人中必有两人同一个月份出生。

③商店里有 10 双皮鞋放在货架上，有 11 位顾客同时来购鞋，售货员给每位顾客拿出一只鞋试穿，则顾客们手中必有两只鞋恰是一双。

④从$\{1,2,\cdots,2000\}$中选 1001 个数，其中必有两个，一个是另一个的整数倍。

事实上，取出的每个数可表成 $2^n a$，n 是非负整数，a 是奇数，故对 1 到 2000 的每个数，a 是 1000 个奇数 $1,3,5,\cdots,1999$ 中的数，可见在所选的 1001 个数中，有两个数的奇数因数 a 是一样的，它们是 $2^{n_1}a$ 和$2^{n_2}a$，不妨设 $n_2>n_1$，则 $2^{n_2}a\div 2^{n_1}a=2^{n_2-n_1}$，即后者能被前者除尽。

⑤在正六边形内任放七个点，则至少有两点之间的距离小于或等于该正六边形外接圆的半径。

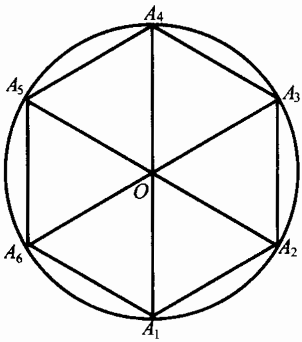

图 4-7

连接正六边形的三条对角线如图 4-7，由鸽笼原理，在图4-7的六个三角形的某个上面必然有放置的七个点中的两个，它们的距离不大于正六边形外接圆的半径。

⑥把 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$ 个球放入 n 个盒子，其中 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 皆正整数，则下面 n 件事至少发生一件：第一个盒子中至少有 m_1 个球，第二个盒子中至少有 m_2 个球，$\cdots$，第 n 个盒子中至少有 m_n 个球。

事实上，若这 n 件事都不发生，则总球数不会超过$(m_1-1)+$

$(m_2-1)+\cdots+(m_n-1)=m_1+m_2+\cdots+m_n-n$，而原来有球 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$，矛盾。

⑦$n(r-1)+1$ 个鸽子进入 n 个窝，r 是自然数，则至少一个窝里的鸽子不会少于 r 只。

⑧n 个自然数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的平均值大于 $r-1$ 时，$m_1,m_2,\cdots,m_n$ 中至少有一个不小于 r，r 是自然数。

事实上，如果 $m_i<r$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $m_1+m_2+\cdots+m_n<nr$，$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}<r$，与 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的平均值大于 $r-1$ 矛盾。

⑨任给定 n^2+1 个不等的实数组成的数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$$

则此数列中至少存在由 $n+1$ 个实数组成的单调递增或单调递减的子数列。

事实上，记 m_i 是从 a_i 开始最长的单调递增子数列的长度，若存在某个 $m_i\geqslant n+1$，则命题⑨已成立。否则，$m_i<n+1$，$i=1,2,\cdots,n^2+1$。于是 m_i 在 1 与 n 之间，这相当于把 n^2+1 个球 $m_1,m_2,\cdots,m_{n^2+1}$ 放入 n 个盒子，由命题⑦，这是 $r=n+1$ 的特殊情形，则 $m_1,m_2,\cdots,m_{n^2+1}$ 中至少有 $n+1$ 个数相等，不妨设

$$m_{i_1}=m_{i_2}=\cdots=m_{i_{n+1}}=m$$

其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n+1}\leqslant n^2+1$；于是 $a_{i_1}>a_{i_2}>\cdots>a_{i_{n+1}}$，若不然，例如 $a_{i_1}<a_{i_2}$，而由 a_{i_2} 开始的递增子列的长度 $m_{i_2}=m$，再把 a_{i_1} 接到此子列前面，则知 $m_{i_1}\geqslant m_{i_1}+1=m+1$，与 $m_{i_1}=m$ 矛盾。至此找到由 $n+1$ 个数组成的递增子序列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{n+1}}$。

例如 17 个数组成的数列

$$9,8,18,20,7,5,4,6,11,15,10,13,12,19,17,3,14$$

$17=4^2+1$，由命题⑨，上述数列中有 $4+1=5$ 个数组成的单调子数

列,事实上,5,6,11,15,19就是一个。20,7,5,4,3是另一个。

从⑨我们看到了“无序中的有序现象”,任意给定的两两相异的若干实数随意排列,却造成单调子列,而且当原数列很长时,此种单调子列也很长,数列无穷,则必含无穷长的单调子列。

⑩圆形舞台,其圆形屋顶匀称地安装两圈灯,外圈100只固定,其中50只红灯,50只绿灯,两色灯随意混合排列;内圈也有红、绿两色灯共100只,其中红绿只数不限,混合在一起,内圈可以绕屋顶中心旋转。则内圈转到某一位置时,会使得内外圈对应位置上的灯至少有50对同色。

事实上,内圈旋转一周的过程中,内圈每只灯都与外圈的灯有100个对应位置,内圈的每只灯在其旋转一周的过程中,与外圈的同色灯有50个对应位置,这一过程中造成同色灯成对的次数为$50\times100=5000$,每一位置上同色灯对应的平均次数为$5000\div100=50$,由命题⑧知,内圈转到某位置时,会使得同色灯至少50对。

仿⑩中的道理可知下面判断成立:

全班共60名同学,从中选30名同学赴黄河上游考察,选出的同学当中男女各半;剩下的同学男女个数不详,随机地排成一队来欢送。出发的同学们随机地列队与欢送同学面对面握手告别,为了和留下的每位同学都握手,他们最右边的那位同学握过手之后就跑到最左侧去与另外的同学一一握手,则定有一个时刻,有15对正在握手的同学是同性别的。