1.9 除法中的余数不可小看

今天是星期一，是本学期的第一天，第 100 天是星期几？现在是零点，100 小时之后是几点钟，等等，对这样的一些问题我们应该有兴趣，也有实用价值和理论推广价值。$100\div7$，商 14 余 2，余 2 就是星期二；$100\div24$，商 4 余 4，余 4 就是 4 点钟，推而广之，若 $m\div7$ 与 $n\div7$ 都余 r，今天是星期一，第 m 天和第 n 天都是星期 r，$1\leqslant r\leqslant6$，如果 $r=0$，即除尽的情形，则第 m 天与第 n 天都是星期日。可见同样的余数代表某种相同的性质。

两个整数 m, n 同被正整数 p 来除，若余数相同，则称 m 与 n 对"模" p 是同余的，记成 $m\equiv n\ (\mathrm{mod}\ p)$。如果 $m\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$，就是说 m 能被 p 整除。

(1) 正整数 n 能否被 3 除尽

设 $n=a_ma_{m-1}\cdots a_0$，a 是各个数位上的数码，则仅当 $a_0+a_1+\cdots+a_m$ 能被 3 除尽时，n 才能被 3 除尽。

事实上，$n=a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_110+a_0$，因为 10 被 3 除余 1，或写成 $10\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$；100 被 3 除余 1，写成 $100\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$，$\cdots$，$10^m\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$，所以 $n\equiv a_0+a_1+\cdots+a_m(\mathrm{mod}\ 3)$，故若 $a_0+a_1+\cdots+a_m$ 能被 3 除尽，即 $a_0+a_1+\cdots+a_m\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)$，则 $n\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)$，即 n 能被 3 除尽。如果 $a_0+a_1+\cdots+a_m$ 不能被 3 除尽，则 n 不能被 3 除尽。

(2) 正整数能被 9 除尽的充要条件是其各数字之和可被 9 除尽

(3) 正整数 n 写成“千进位”形式

$n=a_m 1000^m+a_{m-1}1000^{m-1}+\cdots+a_1 1000+a_0$，其中 $0\leqslant a_i<1000$，则 n 被 7(或 11 或 13)除尽的充要条件是

$$(a_0+a_2+a_4\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots)$$

能被 7(或 11 或 13)除尽。

事实上，由于 1000^2 被 7 除余 1，1000 被 7 除余 -1，则 1000^{2k}被 7 除皆余 1，1000^{2k+1}被 7 除皆余 -1(余 -1 就是余 6)。所以

$$n\equiv(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)\pmod 7$$

即仅当$(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)$被 7 除尽时，$n$ 才能被 7 除尽。

同理可证，仅当$(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)$被 11 或 13 除尽时，$n$ 才能被 11 或 13 除尽。

例如，123456789，由于数字和为

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

45 的数字和是 9，所以 123456789 可被 3 与 9 除尽。

而 1234567891011，由于数字和为

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+1+1=48$$

48 的数字之和为 12，12 的数字之和为 3，所以 1234567891011 能被 3 除尽，但不能被 9 除尽。

又例如 $123456=123\times1000+456$，$a_0=456$，$a_1=123$，$a_0-a_1=456-123=333$，333 不能被 7，11，13 除尽，所以 123456 也不能被 7，11，13 除尽。

同余方法还可以检验出多位数乘法的错误。

$$a=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_1 10+a_0$$

$$b=b_m 10^m+b_{m-1}10^{m-1}+\cdots+b_1 10+b_0$$

$$a\cdot b=c=c_l 10^l+c_{l-1}10^{l-1}+\cdots+c_1 10+c_0$$

则应有

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)(b_0+b_1+\cdots+b_m)$$
$$\equiv(c_0+c_1+\cdots c_l)(\bmod 9)$$

事实上

$$a\equiv(a_0+a_1+\cdots+a_n)(\bmod 9)$$
$$b\equiv(b_0+b_1+\cdots+b_m)(\bmod 9)$$
$$c\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l)(\bmod 9)$$

于是

$$a\equiv 9q_1+r_1,(a_0+a_1+\cdots+a_n)=9q_2+r_1$$
$$b\equiv 9q_3+r_2,(b_0+b_1+\cdots+b_m)=9q_4+r_2$$
$$c\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l(\bmod 9))$$

由于 $ab=c$,则

$$(9q_1+r_1)(9q_3+r_2)\equiv c\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l)(\bmod 9)$$

即

$$r_1r_2\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l)(\bmod 9)$$

而

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)(b_0+b_1+\cdots+b_m)=(9q_1+r_1)(9q_4+r_2)$$

所以

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)(b_0+b_1+\cdots+b_m)\equiv r_1r_2(\bmod 9),$$

最后得

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)(b_0+b_1+\cdots+b_m)$$
$$\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l)(\bmod 9) \tag{1.26}$$

注意,(1.26)是 $ab=c$ 的必要条件,(1.26)不满足时,$ab=c$ 一定是错的,但(1.26)满足,未必 $ab=c$。

例如,$a=1234$, $b=5678$,问 $ab=12345678$ 是否正确?

由于 $1+2+3+4=10, 5+6+7+8=26, 1+2+3+4+5+6+7+8$

$=36$, $10\times 26=260\not\equiv 36 \pmod 9$，事实上 260 被 9 除余 8，而 36 可被 9 除尽，(1.26)式不满足，所以 $ab=12345678$ 不正确。

又问：$1234\times 5678=5678432$ 是否正确？

由于 $5+6+7+8+4+3+2=35$，35 被 9 除也余 8，所以这时(1.26)式成立，但 $1234\times 5678=7006652$ 是真的，所以 $1234\times 5678=5678432$ 是错的。