3.43 图上智斗

甲乙二人约定如下：把圆周 n 等分，甲先连接其中两个分点画一

条绿色的弦，乙接着连接另一对分点画一条红色的弦，如此交替画弦，事先指定一个图$G(V,E)$，甲画出绿色 $G(V,E)$时为胜，甲画不出绿色$G(V,E)$则乙胜。

甲是成事者，努力画出 $G(V,E)$，乙是败事者，对甲的目标进行破坏。

如果 n 很大时，甲必能成功，今问：n 最小是多少，甲仍有必胜策略？

例如甲的目标是画三角形，$n=3$ 时显然不能成功，因为只有三条弦，甲只能占用两条，另一条被乙染红了；当 $n=4$ 时，甲仍不能成功，见图 3-62；事实上，四边形 $ABCD$ 及其两条对角线组成一个 K_4，不妨设甲第一次画绿了 AB 弦，甲至多占用六条弦中的三条，所以甲若成功，不是画成$\triangle ABC$，就是画成$\triangle ABD$，于是乙从 AD，AC，BD，BC 任取一弦，把它画红，则甲只能指望成功$\triangle ABC$ 与 ABD 中的一个了，不妨设$\triangle ABC$ 这时是AC，BC 皆无色待甲去画，甲画绿其中一条，另一条乙接着占用画红了，甲仍然成不了功。

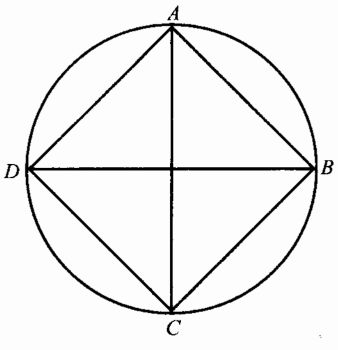

图 3-62

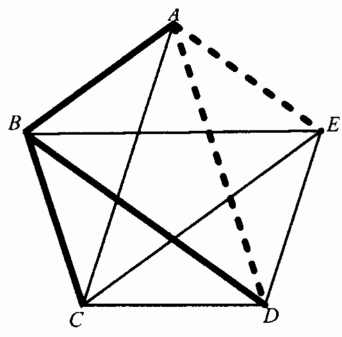

图 3-63

在 $n=5$ 的情况下，不妨设甲首次选 AB 画绿（粗实线），见图 3-63。这时，以 AB 为底边的三角形有三个，其顶点分别是 C，D，E，

乙必须努力在每个三角形上占用一条无色边，不妨设乙首先占用了 AE（粗虚线），接着甲占用了 BD，乙必须接着抢占 AD，甲接着占用了 BC，这时轮到乙画，$\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 皆有两边已画绿，乙面临顾此失彼的被动局面，甲必胜。故知，当 n 最小为 5 时，甲必胜，$n \leqslant 4$ 时，乙必胜；即仅当 $n \geqslant 5$ 时，成事者成，败事者败。

事先指定的目标图 G 可以是任意取定的。

例如是四边形、五边形，甚至长 n 的哈密顿圈，也可以是树，特别地是星或哈密顿轨，这种问题大都极为困难。建议读者以星为指定目标试试看，看 n 最小是多少，甲必胜；所谓星是仅一顶非叶的树。

甲乙活动的场地 K_n 也可以用 $K_{n,n}$ 替代来讨论类似问题。

在 $K_{3,3}$ 上画四顶星，见图 3-64(c)，甲必败，见图 3-64(a)、图 3-64(b)。

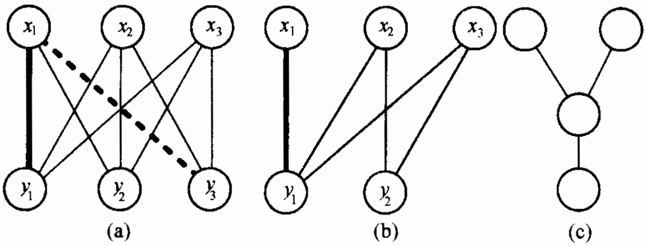

图 3-64

由于 $K_{3,3}$ 各边在全图中的位置对称性，不妨设甲第一笔画绿（粗实线）x_1y_1，乙接着画红（粗虚线）x_1y_3。至此甲放弃 x_1 顶与 y_3 顶，见图 3-64(b)，甲唯一的选择是在 y_1 处发展，但那里只两条无色边，甲只能分得一条，可见甲在 $K_{3,3}$ 上必败。

在 $K_{4,4}$ 上，见图 3-65，甲第一笔画绿 x_1y_1，这时与 x_1，y_1 关联的无色边皆三条，乙必须接着把与 x_1 关联的无色边画红一条，不然，等到甲把与 x_1 关联的无色边再画绿一条，还剩两条无色边与 x_1 关联，甲还能分得一条，于是甲胜。同理，当甲第一笔画绿 x_1y_1 后，乙必须

接着把与 y_1 关联的无色边画红一条，于是乙同时必须画一条与 x_1 关联的边和一条与 y_1 关联的边，这当然顾此失彼，所以在 $K_{4,4}$ 上甲必胜。

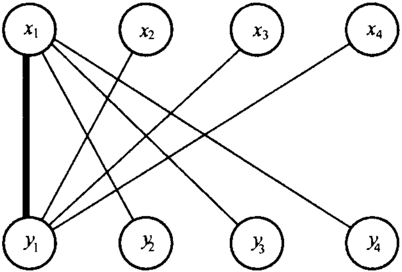

图 3-65

至此知对于目标图为四顶星，在 $K_{n,n}$ 上，n 最小为 4 时甲必胜，n 小于 4 时，甲必败。