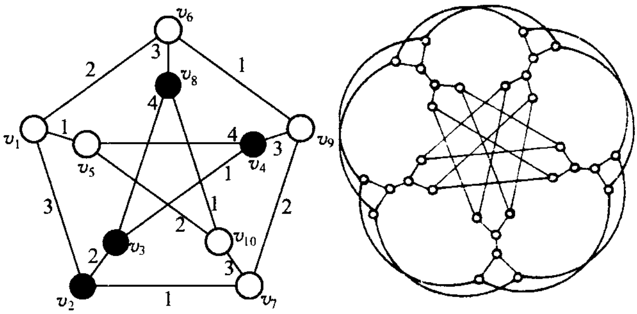
3.34 妖怪的边色数

图 3-45 中画的两个漂亮图数学上称之为妖怪(snark graph),妖怪在此是数学名词,并非贬义的绰号。这种图是每顶皆三次的无桥图,删除三条边不会使它破裂成两个有边子图,它的最小圈上的边数不少于 5,边色数为 4,满足这些要求的图很难设计(捕捉)出来,所以命名为妖怪,以示其神秘和妖美。

图 3-45(a)是佩特森(Petersen)首先讨论过的,又称 Petersen 图,它已成为图论学科的“徽章”,在各种有关图论的杂志和著作的封面上经常出现。它是顶数最少的妖怪,所以亦称“小妖”。下面论证小妖的边色数是 4。

由于小妖每顶皆三次,所以 χ'(小妖)$\geqslant 3$。图 3-45(a)中已经用四种颜色 1,2,3,4 对小妖的边正常着色,故 χ'(小妖)$\leqslant 4$。下面证明



(a) (b)

图 3-45

χ'(小妖)$\geqslant 4$。为此只欠证用三种颜色不能对小妖正常边着色，我们把小妖画成图 3-46 的模样，设图 3-46 可以用三种颜色 1，2，3 正常边着色，由对称性，不妨设与 v_{10}相关联的三条边已用 1，2，3 色染好，则 v_1v_5 与 v_4v_5 分别用 2 色 3 色或 3 色 2 色着色；v_2v_7 与 v_7v_9 分别用 1 色 3 色或 3 色 1 色着色；v_3v_8 与 v_6v_8 分别用 1 色 2 色或 2 色 1 色来着色，于是这六条边的着色有 $2\times2\times2=8$ 种可能的方式需加以讨论。其中之一在图 3-46 上标出，我们来证这种方式行不通，同理可证其他七种方式也行不通，于是知用三种颜色染不了小妖的边，使邻边异色。

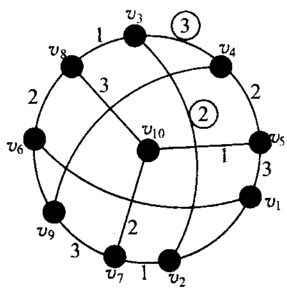


图 3-46

事实上，v_3v_4 只能选 3 色，这时 v_3v_2 只能选 2 色，进而 v_2v_1 的邻边已占用 1，2，3 三种颜色，v_2v_1 无色可选了！

至此知 χ'(小妖)$=4$。

图 3-45(b)中的大妖怪之边色数亦为 4。但论证则更为纷繁，读者可在计算机上去做。

我们何苦一定要讨论各种可能的情形，用笨拙的穷举法来确定

小妖的边色数呢？难道没有简便有效的办法来求得任一图的边色数与顶色数吗？没有！至少目前还没有一个数学家或计算机专家能办到这一点；由于色数问题的本质困难，是否根本就不存在求色数的有效方法目前也没人敢说是或说否。

妖怪的边色数是其顶的最大次数加 1（它的最大次数是 $\Delta=3$，$\chi'(\text{妖})=4=\Delta+1$）有些图的边色数恰为 Δ，例如

$$\chi'(K_{2n-1})=\chi'(K_{2n})=2n-1$$

事实上，把 K_{2n} 的 $2n-1$ 个顶分别放在正 $2n-1$ 边形的 $2n-1$ 个顶点上，把另一顶点 v_0 放在正 $2n-1$ 边形的中心，K_{2n} 的边画成直线段，$v_1, v_2, \cdots, v_{2n-1}$ 为逆时针排列，如图3-47。我们发现一个完备匹配 $\{v_0v_1, v_2v_{2n-1}, v_3v_{2n-2}, \cdots, v_nv_{n+1}\}$ 把这个匹配形成的几何图形绕 v_0 转动 $\frac{2\pi}{2n-1}$，则得另一完备匹配，如此可以得到无公共边的 $2n-1$ 个完备匹配。K_{2n} 的每条边皆在上述 $2n-1$ 个匹配之中。若把每一匹配中的边染上一种颜色，则知 $\chi'(K_{2n})\leqslant 2n-1$。又 K_{2n} 的每个顶与 $2n-1$ 条边关联，所以 $\chi'(K_{2n})\geqslant 2n-1$，可见 $\chi'(K_{2n})=2n-1=\Delta(K_{2n})$。

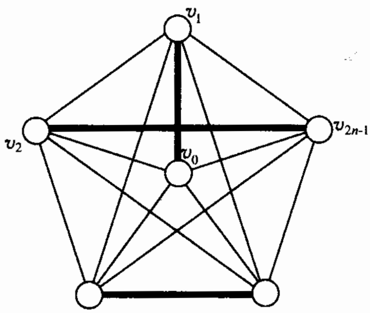


图 3-47

把图 3-47 中的 v_0 从 K_{2n} 上删去，得 K_{2n-1}，此 K_{2n-1} 的边已用 $2n-1$ 种颜色正常着色，故 $\chi'(K_{2n-1})\leqslant 2n-1$。另外，边正常着色中，同色边组成一个匹配，$K_{2n-1}$ 有 $2n-1$ 个顶，其最大匹配只能许配 $2n-2$ 个顶，所以同色边最多 $n-1$ 条，又 K_{2n-1} 的边共 $(2n-1)(n-1)$ 条，故 $\chi'(K_{2n-1})\geqslant \frac{(2n-1)(n-1)}{n-1}=2n$

-1,所以 $\chi'(K_{2n-1})=2n-1=\Delta(K_{2n-1})+1$。

由 $\chi'(K_{50})=49$,见图 3-47,可解下列问题:

某班共 50 位同学,每天两人编成一小组,25 个小组讨论数学题,但每位同学和另一位同学只能进行一次讨论,问这样的小组讨论可以持续多少天?

答:49 天。

从上面的讨论我们发现,有的图 G, $\chi'(G)=\Delta(G)$,有的图 H, $\chi'(H)=\Delta(H)+1$。

若问:什么样的图,其边色数是其最大的次数 Δ,什么样的图,其边色数是 $\Delta+1$?

这个问题从 1964 年维津(Vizing)向数学界"叫板"以来,尚无任何一位数学家能够回答!

图论这块硬饽饽,看起来很美,闻起来很香,吃起来往往消化不良,有的题目简直就一点也啃不动! 这也许是图论之所以诱人的魅力所在。