1.8 草地与母牛的牛顿公式

1707 年，牛顿提出如下草地与母牛问题：

假设每头母牛每天食草量不变，每两头母牛每天食草量相等；每块草地每天长草量不变，每两块草地每天长草量相等，每块草地最初的草量一致。而且已知：

a_1 头母牛在 c_1 天之内把 b_1 块草地上的草吃光了；

a_2 头母牛在 c_2 天之内把 b_2 块草地上的草吃光了；

a_3 头母牛在 c_3 天之内把 b_3 块草地上的草吃光了。

问 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3$ 有何关系。

令每块草地最初的草量为 M，每块草地每日长草量为 m，每头牛每日食草量为 q。

第 c_1 天晚上 b_1 块草地上的草被 a_1 头牛吃光，这一事实可以表成

$$b_1M+c_1b_1m-c_1a_1q=0 \tag{1.20}$$

同理可得

$$b_2M+c_2b_2m-c_2a_2q=0 \tag{1.21}$$

$$b_3M+c_3b_3m-c_3a_3q=0 \tag{1.22}$$

从(1.20)，(1.21)解得

$$M=\frac{c_1c_2(a_1b_2-b_1a_2)}{b_1b_2(c_2-c_1)}q,\quad m=\frac{b_1c_2a_2-b_2c_1a_1}{b_1b_2(c_2-c_1)}q$$

代入(1.22)得

$$\frac{c_1c_2(a_1b_2-b_1a_2)}{b_1b_2(c_2-c_1)}qb_3+\frac{b_1c_2a_2-b_2c_1a_1}{b_1b_2(c_2-c_1)}qc_3b_3-c_3a_3q=0$$

$$b_3c_1c_2(a_1b_2-b_1a_2)+c_3b_3(b_1c_2a_2-b_2c_1a_1)-c_3a_3b_1b_2(c_2-c_1)=0$$

$$\begin{aligned}&a_1b_2b_3c_1c_2-a_2b_1b_3c_1c_2+a_2b_1b_3c_2c_3\\&-a_1b_2b_3c_1c_3+a_3b_1b_2c_1c_3-a_3b_1b_2c_2c_3=0\end{aligned} \tag{1.23}$$

(1.23)可以用下面的格式表示，见图 1-2。

把(1.20)，(1.21)，(1.22)的系数排成三行，构成一个 3×3 的行列方块，实线串起来的三个数(右下走向)相乘，虚线串起来的三个数相乘加负号，再把此六个积相加即得关系式(1.23)的左端。图 1-2 中的行列方块叫做三阶行列式，(1.23)式是此行列式的值。

牛顿的“草地母牛公式”为三阶行列式

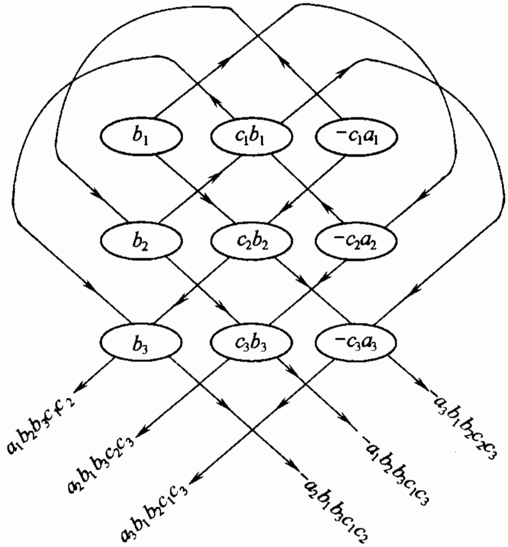

图 1-2

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1c_1 & -a_1c_1 \\ b_2 & b_2c_2 & -a_2c_2 \\ b_3 & b_3c_3 & -a_3c_3 \end{vmatrix}=0 \tag{1.24}$$

或写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1c_1 & c_1a_1 \\ b_2 & b_2c_2 & c_2a_2 \\ b_3 & b_3c_3 & c_3a_3 \end{vmatrix}=0 \tag{1.25}$$

如果把(1.20),(1.21),(1.22)中的 M, m, q 视为未知数,由于 M, m, q 是正数,即(1.20),(1.21),(1.22)存在非零解;一般而言

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是系数的三阶行式为零，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

这一结论还可以推广到未知数更多的方程组。