3.32 八皇后和五皇后问题

八皇后问题:国际象棋盘上,双方共有八个“后”,这八个后在哪些格里,才能出现谁也不能吃掉对方后的局面?

五皇后问题:我方有五个“后”,应放哪些格子上,才可吃掉对方的任何一个子儿?

为解决上述皇后问题,应当从独立集谈起。$I \subseteq V(G)$,若 I 中顶两两不邻,则称 I 是 G 的独立集。K_n 中只有由一个顶构成的独立集,而 $K_{n,n}$ 中的 X 集合与 Y 集合都是独立集。在顶正常着色中,同色顶构成独立集。

以 64 个格为顶集,处于同一横行,同一纵列和在同一“斜行”上的两顶相邻,所谓“斜行”是指与水平线成 45°角的方格串,如此构成的图 G 称为“皇后图”,即把一后放在 G 的任一顶上,它可以吃掉其邻顶上的对方的棋子。

高斯八皇后问题就是求皇后图 G 上的由八个顶组成的独立集 I;显然,这个独立集是 G 的一切独立集当中顶数最多者;图论中称顶数最多的独立集为最大独立集,其顶数称为该图的独立数,记之为 $\alpha(G)$,例如 α(皇后图)$=8$。除最大独立集之外,还有一种独立集称

为极大独立集，即 I 已是独立集，但再添加一顶则不是独立集了，这种不能在原有的基础上扩充的独立集叫做极大独立集，它是个局部概念，但不是全局性概念，极大独立集不一定是最大独立集。

五皇后问题就是求皇后图 G 的一个极大独立集 I，使得 I 由五个顶组成。它的一个解如图 3-43 所示，由此知极大独立集有的就不是最大独立集。

图 3-43 中，皇后图的每个顶要么在五个黑子组成的顶子集中，要么是这五个黑子中的某个的邻顶，即受黑子的“支配”，这五个黑子组成的集合称为支配集。一般地，设 $D\subseteq V(G)$，且任一顶 $v\in V(G)$，则或者 $v\in D$，或者 v 与 D 中一顶相邻，则称 D 为 G 的一个支配集。如果 D 是支配集，从 D 中删除一顶后则不再是支配集，则称 D 是极小支配集。最小支配集中的顶数称为图的支配数，记之为 $\gamma(G)$。显然，极大独立集一定是极小支配集。

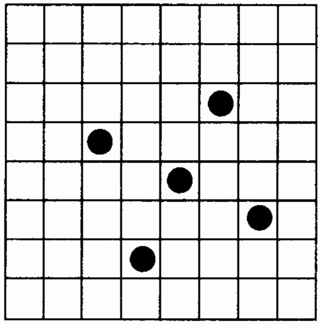

图 3-43

例如图 3-43 中的五皇后组成极大独立集，它们也就组成了一个极小支配集。

高斯八皇后问题的解在图 3-44 中给出了两个。图 3-44(a)中的解记成(72631485)，代表每个后在各列的高度，例如 7 代表第 1 列后高 7，2 代表第 2 列后高 2，6 代表第 3 列后高 6，等等。可以验证，高斯八皇后问题的解有

(72631485)　(61528374)　(58417263)
(35841726)　(46152837)　(57263148)
(16837425)　(57263184)　(48157263)
(51468273)　(42751863)　[35281746]

上面 12 个序列的每一个都对应一个类似图 3-43 的皇后分布图，前 11 个序列对应的分布图按逆时针每转动 90°，则得另一种八皇

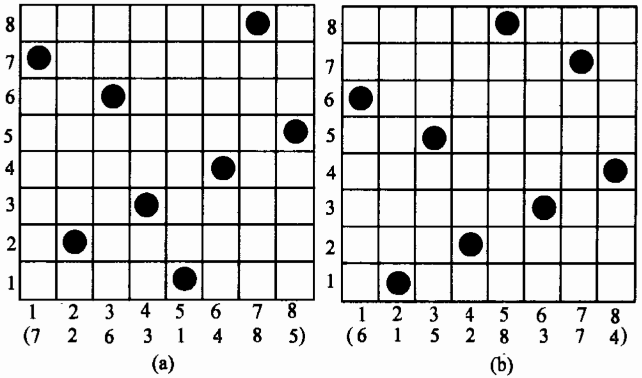

图 3-44

后分布图，旋转得到的四个分布图按向右下方的对角线对称翻身，又得四个分布图，所以共计可得 $11\times8=88$ 个解。最后那个分布[35281746]旋转 180°后复原，所以它只会旋转 90°和翻身两次，得四个分布图，最后得知，高斯八皇后问题有 $88+4=92$ 个解。