3.31 颜色多项式

四色猜想问世一百多年来，数学家们对它的研究虽皆以失败而告终，但在人们冲击 4CC 的崎岖道路上却留下许多闪烁着智慧之光的所谓“中间成果”，1912 年，伯克豪夫为研究 4CC 而引入的颜色多项式就是其中的杰作之一。

今有 $k(\geqslant 1)$ 种颜色，用来对顶集为 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的图 G 进行正常顶着色，问有几种不同的着色方式。

所谓两种着色方式不同，是指至少有一个顶，在两次着色中的颜色不同，用 $P(G,k)$ 表示 G 用 k 种颜色正常顶着色时不同的着色方式之数目。于是 4CC 可写成

$$P(\text{平面图}, 4)>0$$

$P(G,k)$ 的确定和证明 4CC 一样，也是十分困难的，我们只能对一些特殊图 G 求得 $P(G,k)$。

①若 $E(G)=\phi$，则 $P(G,k)=k^n$。

② $P(G,k)>0$ 的充要条件是 $\chi(G)\leqslant k$。

③ $P(K_n,k)=k(k-1)(k-n+1)$。

对于一般图 G，有公式

$$P(G,k)=P(G-e,k)-P(G\cdot e,k) \tag{3.8}$$

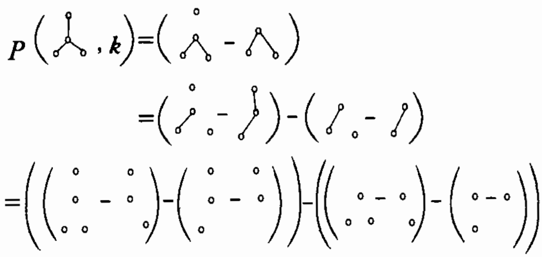
其中 $G\cdot e$ 是把 G 中边 e 收缩掉，其两端点重合。

事实上，考虑 $P(G-e,k)$，在对 $G-e$ 用 k 种颜色正常顶着色时，e 的端点 u 与 v 可以同色，也可以异色；若 u 与 v 同色，则 $G-e$ 的着色方式数为 $P(G\cdot e,k)$，若 u 与 v 异色，则 $G-e$ 的着色方式数为 $P(G,k)$，所以 $P(G-e,k)=P(G,k)+P(G\cdot e,k)$，于是公式 (3.8) 成立。

可惜的是公式(3.8)对边数多的图是一个无能的“坏公式”，因为

对 ε 条边的图，若用公式(3.8)把 G 变成两个图 $G-e$ 与 $G\cdot e$ 后，$G-e$ 与 $G\cdot e$ 再各自减一边缩一边变成两个图，如此会变换出 2^{ε} 个图来，每个皆无边之图，可以用无边图的公式来写出多项式 $P(G,k)$。但是 2^{ε} 这个数量太巨大，例如 2^{100}，$\lg 2^{100}=100\lg 2\approx 30.10$，可见 2^{100} 是个 31 位数，绝对不可能有那么多时间执行这个公式。

但对边少的图，公式(3.8)还是可以用的，例如



$$=((k^4-k^3)-(k^3-k^2))-((k^3-k^2)-(k^2-k))$$

$$=k^4-3k^3+3k^2-k$$

$$=k(k-1)^3$$

图论当中这种“形数同炉”的运算并非此处一次出现，又直观又定量，颇为新颖。

我们从公式(3.8)的反复执行中发现，对于任何图，都可化成秃图来求其 $P(G,k)$，所以 $P(G,k)$ 是 k 为变元的 n 次多项式，n 是 G 之顶数，且此多项式无常数项，此多项式称为颜色多项式。

上面求得 4 顶树的多项式为 $k(k-1)^3$，从“形数同炉”的运算过程中我们可以发现，对任何 n 顶树 T，有公式

$$P(T,k)=k(k-1)^{n-1} \tag{3.9}$$

用归纳法来证(3.9)。当 $n=2$ 时，(3.9)式显然成立；假设对于 n 个顶的树 T，(3.9)式已成立，考虑 $n+1$ 个顶的树 T'，设 v 是 T' 的一个叶，令 $T=T'-v$，由归纳法假设，$P(T-v,k)=k(k-1)^{n-2}$，对于 T' 的用 k 种颜色的每种正常顶着色，对 v 的颜色选择有

$k-1$ 种方式，可见 $P(T,k)=k(k-1)^{n-1}\cdot(k-1)=k(k-1)^{n}$。

关于颜色多项式，也有不少问题等待我们去研究，例如下面的 Read 猜想至今无人证其明亦无人证其伪。

Read 猜想：按降幂排列的颜色多项式的系数的绝对值先是严格单调上升，继而严格单调下降。

本来企图用颜色多项式这种新概念来解决 4CC 难题，结果目的没有达到，反而给自己增添了难题。这真是，知识越多，本领越高，面临的困难越大。