3.30 五色定理和肯普绝招儿

1890 年,希伍德(Heawood)继承肯普(Kemple)1879 年误证四色定理时用的方法,证明了五色定理

$$\chi(\text{平面图})\leqslant 5 \tag{3.6}$$

用对平面图 G 的顶数 ν 的归纳法来证明五色定理:

$\nu\leqslant 5$ 时,(3.6)式显然成立。假设 $\nu\leqslant n-1$ 时(3.6)式已成立,考虑 $\nu=n$ 的平面图 G。由于 $\delta(G)\leqslant 5$,即存在 $\nu_0\in V(G)$, $d(v_0)\leqslant 5$。

情形 1 $d(v_0)\leqslant 4$,考虑 $G-v_0$,由归纳法假设,$\chi(G-v_0)\leqslant 5$,把 $G-v_0$ 用不超过 5 种颜色正常着色后,再把 v_0 着以异于其邻顶的第五种颜色即可。

情形 2 $d(v_0)=5$。设 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 是 v_0 的五个邻顶,按逆时针顺序画在 v_0 周围如图 3-42。它们分别着以 1, 2, 3, 4, 5 五种颜色。以下其他顶着色时只允许用这五种颜色;先把 $G-v_0$ 用以上五色正常着色。

记 $G_0=G-v_0$, G_{13}是由 1 和 3 两种颜色的顶为顶集,边的两端为 1 色与 3 色时为 G_{13}的边形成的 G_0 之子图。G_{24}作相似理解。

若在 G_{13} 中 v_1 与 v_3 分居于两个连通片，把含 v_1 的那个连通片中的 1 色与 3 色互换，由归纳法假设，$\chi(G_0)\leqslant 5$，这时再把 v_0 着以 1 色即可。

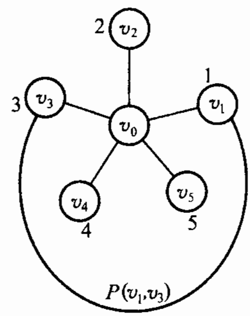

图 3-42

若 v_1 与 v_3 在 G_{13} 的同一连通片内，则存在轨 $P(v_1, v_3)$，在 $P(v_1, v_3)$ 上 1 色与 3 色交替出现，而在 G 中，$v_0v_1P(v_1, v_3)v_3v_0$ 是一个圈，v_2 与 v_4 分居于此圈之内外，在 G_0 中，子圈 G_{24} 中，v_2 与 v_4 必分属于 G_{24} 的两个连通片，不然，G_{24} 中有轨道 $P(v_2, v_4)$ 与 $P(v_1, v_3)$ 相交于一个公共顶 u，u 在 $P(v_1, v_3)$ 上应是 1 色或 3 色，u 又在 $P(v_2, v_4)$ 上，u 应为 2 色或 4 色，这当然不可能。

既然 v_2 与 v_4 分属于 G_{24} 的两个连通片，把 v_2 所在的连通片中的 2 色与 4 色交换，再把 v_0 染上 2 色即可。至此证出五色定理(3.6)。

证明中两次使用两色互换的技术，这是肯普首创的一个绝招。在关于图的色的研究当中，人们不只一次地引用过这一绝招。阿佩尔也承认，他们在用计算机证明 4CC 时，也借鉴了肯普当年证明 4CC 时用过的方法和思路。

四色定理尚缺可视性证明，进一步的问题则更加尖锐：

$$\text{任给一个平面图 } G, \chi(G)\leqslant 3 \text{ 吗} \tag{3.7}$$

这个问题有时回答：是，例如 $G\cong K_3$；有时回答：否，例如 $G=K_4$，所以已无三色定理可言，但对任意给定的平面图 G，如何有效地判定 $\chi(G)$ 是否不大于 3，则是比四色定理还要困难的问题，四色定理还可以用计算机给出证明，而(3.7)问题目前用计算机也不能有效地解决。