图 3-41

3.29 彩色图，不仅为了美

用几种颜色给一个图上色，使其每个顶或每条边或(平面图的)每个面着某种颜色，于是图上色彩斑斓，颜形俱佳，不愧为数学园地上的艺术品。如果邻顶异色或邻边异色或邻面异色，则分别称为正常顶着色、正常边着色或正常面着色；正常着色时使用的最少颜色数目，分别称为图的色数、边色数或(平面图的)面色数；且分别记成 $\chi(G)$，$\chi'(G)$和 $\chi^*(G)$。

前面讲过的地图染色时的四色猜想可以写成

$$\chi^*(\text{平面图})\leqslant 4$$

染一个省(国家)的版图时，可以仅把其省会(首都)染成某种颜色，以省会的颜色代表全省已全面积染上了这种颜色；以省会为顶，仅当两省相邻时(有一段分界线)在两省会间连一边，构成平面地图的对偶图 G^*，于是 $\chi^*(\text{平面图 } G)=\chi(G^*)$。这样就把面正常着色的问题化成顶正常着色的问题了。四色问题可以写成

$$\chi(\text{平面图})\leqslant 4$$

四色问题至今仍然困惑着数学界，甚至殃及为数极多的业余数学爱好者。正如美国当代图论专家哈拉里(Harary)所言："四色猜想可以改名叫做'四色病'，因为它真的像传染病似的在数学界流行，虽然还没有因它致死的消息，但它的确会使感染者异常痛苦，而且已经发现父亲传给了儿子的事，看来它甚至是遗传性疾病。"哈拉里说的

是真话，绝非故弄玄虚。最近十几年当中，本书作者收到大学生和大中小学教师等各种年龄的人士寄来的稿件，宣称他们已经证明了四色猜想，希望给予肯定的评价，其中不乏十几年如一日废寝忘食的入迷者，甚至因此心力交瘁，实在令人敬佩。无奈那些手写的文稿皆因缺乏数学的严格性，只能说是某种“说明”而不够称为正确证明的资格。事实上，就目前图论发展的水平，手写的4CC证明问世的时机未必已经成熟，奉劝数学爱好者，不可轻信“有志者事竟成”之类唯意志论的误导，应当懂得，数学上的确存在百思不得其解的难题。切不可抓住4CC之类的难题不放。

给图上色，不仅仅是为了美，借助于着色的思路和技术来解决的实用问题非常之多，不信请看下面实例。

(1) 期末考试至少几天

全校共 n 门功课需要期末考试，不少学生不止选修一门功课，不能把一位同学选修的两门课安排在一个时间考试；以每门功课为顶，仅当两门功课被一些同学选修时，在此二顶之间连一条边，构成图 G。我们对 G 进行正常顶着色，$\chi(G)$即为所求的期末考试的最少场次。若每天考两场，则全校要进行 T 天考试

$$T=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\chi(G), & \chi(G)\text{为偶数}\\ \left[\dfrac{1}{2}\chi(G)\right]+1, & \chi(G)\text{为奇数}\end{cases}$$

(2) 至少需要几间库房

有些货物，不能放在同一个库房，例如黄鼠狼和小鸡，放在一起不安全，问至少需要几间库房？

以货物为顶，仅当二宗货物放在一起不安全时，在此二顶间连一边，得一图 G，$\chi(G)$即为所需库房的最少间数。

(3) 距离约束同信道频率分配问题

地面上有若干无线电发射台，要对每个发射台分配一个发射频率，频率用自然数从 1 起编号，称为信道号码。为排除同频率造成干扰，要求使用同一信道的发射台相距必须大于指定正数 d，问至少要用几个信道？

以 $\frac{d}{2}$ 为半径，以发射台为中心作圆，仅当两圆有公共点时，在两圆的中心间连一边，以圆心为顶点，构成一图 G，$\chi(G)$ 即为所需的最少信道数目。