3.28 非平面图的两个疙瘩

不是什么图都可以摆平画在平面上，使得边不交叉的。1930 年，

波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowsky)证明了下面的定理:

G 是平面图的充要条件是 G 中无可以收缩成 K_5 或 $K_{3,3}$的子图。

所谓收缩是指把一些边收缩成长度为0,且使其两端点重合的过程。例如图3-39。

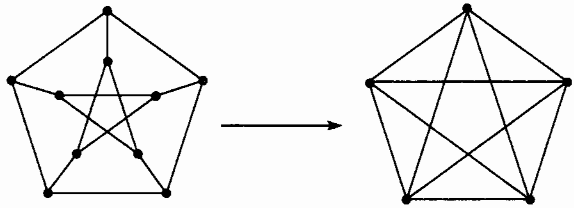

图 3-39

可见 K_5 与 $K_{3,3}$是图中的两个“瘤子”,而且是恶性的,只要有这两种疙瘩之一时,就不可摆平了,没有这种疙瘩,则一定可以摆平。为了证明 K_5 与 $K_{3,3}$是非平面图,需要用到下面的公式

$$\sum_{i=1}^{\varphi} d(f_i) = 2\varepsilon \tag{3.3}$$

其中 f_i 是平面图的面,$d(f_i)$是面 f_i 边界上的边数,不过 f_i 的边界上有桥时,此桥在 $d(f_i)$中要算2,如图3-40中 $d(f_1)=6$,事实上,沿 f_1 的边界走一周,那个勺子把(桥)要走两遍。

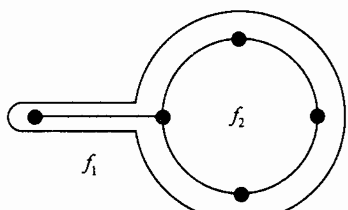

图 3-40

平面图可以把边不交叉地安排在平面上，可见它的边不会太多太密。对于平面图 G 有公式

$$\varepsilon(G) \leqslant 3\nu(G) - 6 \tag{3.4}$$

$$\delta(G) \leqslant 5 \tag{3.5}$$

其中 $\delta(G)$是 G 的最小的顶次数，$\nu \geqslant 3$ 是顶数。

事实上，由于 G 是连通平面图时，对每个面 $f, d(f) \geqslant 3$，于是由公式(3.3)得

$$2\varepsilon = \sum_{i=1}^{\varphi} d(f_i) \geqslant 3\varphi$$

由欧拉公式，$3\nu - 3\varepsilon + 3\varphi = 6$，于是

$$3\nu(G) - 6 = 3\varepsilon - 3\varphi \geqslant 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon$$

由于

$$\delta\nu \leqslant \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon \leqslant 2(3\nu - 6)$$

得

$$\delta \leqslant 6 - \frac{12}{\nu}$$

故 $\delta \leqslant 5$，至此证出(3.4)、(3.5)式为真。

由公式(3.4)，若 K_5 是平面图，则 $\varepsilon(K_5) \leqslant 3\nu(K_5) - 6$，即 $10 \leqslant 3 \times 5 - 6 = 9$，这不可能，可见 K_5 非平面图。

若 $K_{3,3}$是平面图，又它无奇圈，所以它的每个面的边界上至少 4 条边，于是

$$4\varphi \leqslant \sum_{i=1}^{\varphi} d(f_i) = 2\varepsilon(K_{3,3}) = 2 \times 9 = 18$$

故 $\varphi \leqslant \frac{18}{4}$，即 $\varphi \leqslant 4$，代入欧拉公式得

$$2 = \nu(K_{3,3}) - \varepsilon(K_{3,3}) + \varphi(K_{3,3}) \leqslant 6 - 9 + 4 = 1$$

矛盾，可见 $K_{3,3}$不是平面图。

前面提到的“五王子修路”问题显然无解，因为他们干的是想把

K_5 摆平的傻事！ K_5 是非平面图，不可能边不交叉地画在地平面上，除非他们认可有两座宫殿间不设直通驿道或建造一座立交桥，见图 3-41，①③与②⑤交叉处是立交桥。