3.27 正多面体为何仅五种

(1) 多面体的棱数不会少于 6，不等于 7

事实上，以多面体的顶为图 G 之顶点，以多面体的棱为 G 的边，则 G 是连通平面图。又 $\nu(G)\geqslant 4$，$\varphi(G)\geqslant 4$，由欧拉公式得

$$\varepsilon(G)=\nu(G)+\varphi(G)-2\geqslant 4+4-2=6$$

即棱数不少于 6。

由于 $2\varepsilon(G)\geqslant 3\varphi(G)$，若有七棱多面体，则 $2\times 7\geqslant 3\varphi(G)$，$4\leqslant\varphi(G)\leqslant\frac{14}{3}$，$\varphi(G)$是整数，只有 $\varphi(G)=4$，而四个面的多面体只有六条棱，故无七条棱的多面体。

六条棱的多面体是存在的，正四面体就是一个，以 k 边形为底的棱锥是 $2k$ 条棱的多面体，$k\geqslant 4$；而把 $k-1$ 边形为底的棱锥底角处的一个三面角锯掉一个小“尖儿”，则得 $2k+1$ 条棱的多面体，所以对于 $n\geqslant 6$, $n\neq 7$ 的 n，皆存在 n 棱多面体。

(2) 正多面体只有五种

不会有这样的正多面体，它的面是正六边形，因为正多面体的一个顶点处至少有三个面拼在一起，而正六边形每个内角为 120°，三个正六边形拼在一起已经是 360°，形成平面的一部分，形不成正多面体的“顶尖”了。边数再多的正多边形更没办法做一个正多面体的面，因为它们的每个内角超过了 120°。可见正多面体的面只可能是正五边形、正方形和正三角形。

①正三角形为面的正多面体。

情形 1 若组成的正多面体每顶皆 3 次，则 $3\nu=2\varepsilon$, $\nu=\frac{2}{3}\varepsilon$, $2\varepsilon=3\varphi$, $\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=6$, $\nu=4$, $\varphi=4$，这种多面体是正四面体。

情形 2 若组成的正多面体每顶皆4次，则 $4\nu=2\varepsilon$, $\nu=\frac{1}{2}\varepsilon$, $3\varphi=2\varepsilon$, $\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{1}{2}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=12$, $\nu=6$, $\varphi=8$，这种多面体是正八面体。

情形 3 若组成的正多面体每顶皆5次，则 $5\nu=2\varepsilon$, $\nu=\frac{2}{5}\varepsilon$, $3\varphi=2\varepsilon$, $\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{2}{5}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=30$，$\nu=12$，$\varphi=20$，这种多面体是正 20 面体。

②正方形为面的正多面体。

这种正多面体每顶只能 3 次，故 $3\nu=2\varepsilon$，$\nu=\frac{2}{3}\varepsilon$，$4\varphi=2\varepsilon$，$\varphi=\frac{1}{2}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=12$，$\nu=8$，$\varphi=6$，这种多面体是立方体。以上得到的四种正多面体的形象见图 3-24。

③正五边形为面的正多面体。

这种多面体每顶皆 3 次，于是 $3\nu=2\varepsilon$，$\nu=\frac{2}{3}\varepsilon$，$5\varphi=2\varepsilon$，$\varphi=\frac{2}{5}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{5}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=30$，$n=20$，$\varphi=12$，这种正多面体是正 12 面体，见图3-38。

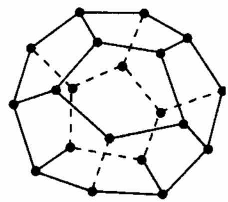

图 3-38

可见只有以下五种正多面体：

面形	正三角形	正方形	正三角形	正五边形	正三角形
面数	4	6	8	12	20
棱数	6	12	12	30	30
顶数	4	8	6	20	12
每顶处棱数	3	3	4	3	5