3.26 多面体黄金公式

平面几何中的正多边形有无穷多种,在立体几何当中,由全等正多边形为面每顶处棱数相等的正多面体是否也有无穷多种? 如果不是,共有几种正多面体,它们的顶数、棱数和面数是多少? 对于一般的凸多面体,有没有任意棱数的多面体? 例如,有七条棱的多面体吗?

1736 年,欧拉给出了一个关于多面体的公式,一劳永逸地彻底解决了这些问题。我们知道,多面体是平面图,讨论平面图可以解决多面体的一些问题。

把连通平面图 G 画在平面上,使无边在内点相交,把平面划分成若干区域,每一区域称为平面图的一个面,面数用 φ 表示,若 ν 和 ε 分别表示顶数和边数,则下面的欧拉公式成立

$$\nu-\varepsilon+\varphi=2$$

由于这个公式简单漂亮，用途极广，人称多面体黄金公式，它的证明十分简洁，对 φ 用数学归纳法证明如下：

$\varphi=1$ 时，G 中无圈，又 G 连通，则 G 是树，于是$\varphi=1$，$\varepsilon=\nu-1$，这时 $\nu-\varepsilon+\varphi=\nu-(\nu-1)+1=2$，欧拉公式成立。

假设对于 $\varphi\leqslant k(k\geqslant 1)$时，公式已成立，考虑 $\varphi=k+1$ 的情形，由于 $\varphi=k+1\geqslant 2$，G 中有圈，设 e 是某圈C 上一边，则 $G-e$ 仍是连通图，被 e 分隔的两个面变成$G-e$ 中的一个面，于是 $\varphi(G-e)=k$，由归纳法假设

$$\nu(G-e)-\varepsilon(G-e)+\varphi(G-e)=2$$

$$\nu(G)-[\varepsilon(G)-1]+[\varphi(G)-1]=2$$

$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=2$$

证毕。

把平面图画在平面上，使得边不交叉，可以有多种画法，例如可使任一顶点画在平面上面积无穷的那个所谓外面的边界上，但由欧拉公式，各种画法的面数 φ 是常数。