3.24 天敌纵队和王

有 100 种昆虫，每两种之中必有一种能咬死另一种，即一种昆虫是另一种昆虫的天敌，能不能把它们排成一路纵队，使得每种昆虫（除排头外）前面都是自己的天敌？

在体育比赛中也有相似的问题，几个球队进行甲 A 循环赛，每两队队间都赛一场，无平局；如果甲胜乙，则从甲向乙画一有向边，以 n 个球队为顶集，构成一有向图 G，则 G 称为循环赛图，上述的“天敌纵队问题”的图论模型是以虫为顶，甲能咬死乙时，从甲向乙连一有向边，于是构成一循环赛图，问的是循环赛图中是否有有向哈密顿轨，即含图上一切顶的有向轨。

答案是肯定的，下面用数学归纳证明：

循环赛图中存在哈密顿轨。

循环赛图 G 的顶数为 2 时，命题显然成立。

假设对不超过 k 个顶的循环赛图，命题已成立，$k\geqslant 2$，往证 $k+1$ 的循环赛图，命题仍成立。任取一顶 $v\in V(G)$，由归纳法假设，$G-v$ 中有有向哈密顿轨 $u_1u_2\cdots u_k$，$u_i\in V(G)$，$i=1,2,\cdots,k$。

①若 G 中与 v 关联的有向边皆从 v 指向 $G-v$ 中的顶，或从 $G-v$ 中的顶指向 v，则显然 $vu_1u_2\cdots u_k$ 或 $u_1u_2\cdots u_kv$ 是 G 的有向哈

密顿轨。

②若 $V(G)$ 中以 v 为头的边的尾集 $V_1\neq\varnothing$，以 v 尾的边之头集 $V_2\neq\varnothing$，设 G_1, G_2 分别是 G 中以 V_1, V_2 为顶集的子循环赛图，由归纳法假设，G_1 中有其有向哈密顿轨 $P_1(v_1, w_1)$，G_2 中有其有向哈密顿轨 $P_2(v_2, w_2)$，于是 G 中的有向轨 $P_1(v_1, w_1)vP_2(v_2, w_2)$ 是有向哈密顿轨，证毕。

在体育竞赛中，胜者为王，优胜劣汰，如果 u 胜 v，则称 u 优于 v，如果 w 是 u 的手下败将，而 w 又胜 v，则亦称 u 优于 v。若竞赛中有一运动队优于所有其他运动队，则称其为王牌运动队，相应地，在循环赛图中，优于一切其他顶的顶称为"王点"。

若规定胜一次得一分，败者得零分，则有结论：得分最多的为王点。

事实上，设 u 是循环赛中得分最多者，若 u 得分为 $n-1$（n 是循环赛图的顶数），则 u 优于所有其他顶，u 自然是王点，若 u 的得分不是 $n-1$，但 u 得分最多，u 战胜了 $v_1, v_2, \cdots, v_k$，而败给了 $v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_{n-1}$。若 v_{k+1} 战胜了 $v_1, v_2, \cdots, v_k$，则 v_{k+1} 比 u 多胜一次，与 u 得分最多矛盾，所以存在 v_j，$1\leqslant j\leqslant k$，v_j 胜过 v_{k+1}，于是发生 u 胜 v_j，v_j 又胜 u_{k+1} 的现象，即 u 优于 v_{k+1}，同理 u 优于 $v_{n+2}, \cdots, v_{n-1}$，即 u 是王点，证毕。

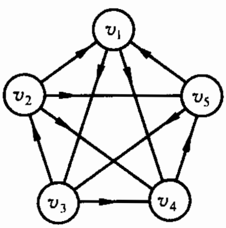

图 3-36

如果得分最多者为冠军，王点未必能得冠军，即王点不一定是得分最多的，例如图 3-36 中 v_2 得 3 分，是得分最多者，当然是王点，但 v_1 也是王点，它只得了 2 分，得不了冠军。

如果只有一个王点，则它得分 $n-1$；反之，如果一顶得分 $n-1$，则它是唯一的王点。

事实上，若 u 是 G 中唯一王点，但 u 的得分

不超过 $n-2$, 则有有向边以 u 为头, 把所有这种边尾上的顶作为顶集构成子循环赛图 G', 由于得分最多的是王点, G' 中也有王点 v; 于是 v 也是 G 的王点, 与 u 是 G 的唯一王点相违, 故 u 得分 $n-1$。

反之, 若 u 得分 $n-1$, 它得分最多, 故 u 是王点。若还有一个王点 $v \neq u$, 则有一有向边以 v 为尾以 u 为头或有一有向轨 vwu。总之 u 是某有向边的头, u 至少败过一次, 与 u 得分 $n-1$ 矛盾, 故不会有王点 $v \neq u$, 即这时王点唯一。