3.23 又是贪官聚餐

一日,$2n$ 名($n>1$)贪官来酒店吃饭,某些贪官之间有积怨,但每个贪官的积怨者不超过 $n-1$ 个,他们想围圆桌就坐时,都不与有怨者为邻,是否可能?

若以贪官为顶,在每对儿无怨者之间连一边,则每顶次数不小于 n,任二顶次数之和不小于顶数 $2n$,当年匈牙利的一位中学生波沙(L.Pósa)证明了下面的定理:

n 顶图 G($n\geqslant 3$)中每对顶次数之和不小于 $n-1$ 时,G 中有哈密顿轨;每对顶次数之和不小于 n 时,G 中有哈密顿圈。

这个定理是 1960 年奥尔(Ore)提出的,下面介绍波沙的精彩证明(波沙后来成为了著名的图论专家)。

首先证明若每对顶 u,v,$d(u)+d(v)\geqslant n-1$,则 G 是连通图,若 G 不连通,有 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega$ 这 ω 个连通片,$\omega\geqslant 2$,取 $u\in V(G_1)$,$v\in V(G_2)$,则 $d(u)\leqslant n_1-1$,$d(v)\leqslant n_2-1$,n_1,n_2 分别是图 G_1,G_2 的顶数,于是

$$d(u)+d(v)\leqslant n_1+n_2-2\leqslant n-2$$

与 $d(u)+d(v)\geqslant n-1$ 相违,所以 G 连通。

设任二顶 $u, v, d(u)+d(v)\geqslant n-1$，但 G 中无哈密顿轨，令 $P(v_1, v_{l+1})=v_1v_2\cdots v_{l+1}$是 G 中最长轨，$l<n-1$，则与 v_1, v_{l+1}关联的边(当然有)之另一端点必在$P(v_1, v_{l+1})$内部(非端点)，不然，若 v_iv_{l+1}是边，又 $P(v_1, v_{l+1})$不是哈密顿轨，还有一顶 v_{l+2}不在$P(v_1, v_{l+1})$上，再由 G 之连通性，定会形成图 3-34 的结构，其上的粗实线表出的轨比$P(v_1, v_{l+1})$至少多一条边，与 $P(v_1, v_{l+1})$最长矛盾。

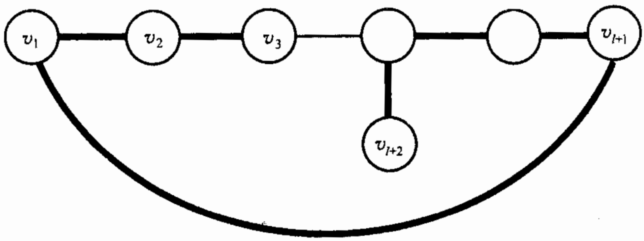

图 3-34

设 v_1 的邻顶是 $v_{j1}, v_{j2}, \cdots, v_{jk}$而 $v_{j1-1}, v_{j2-1}, \cdots, v_{jk-1}$都不与 v_{l+1}相邻，则 $d(v_1)=k, d(v_{l+1})\leqslant l-k$，于是 $d(v_1)+d(v_l+1)\leqslant k+l-k=l<n-1$，与定理条件不符，于是存在$P(v_1, v_{l+1})$的两个内顶 v_i, v_{i+1}, v_1 与 v_{i+1}相邻，v_{l+1}与 v_i 相邻，见图 3-35。

图 3-35 中存在长 $l+1$ 的圈 C 如粗实线所示。又$P(v_1, v_{l+1})$上不包括 G 的一切顶，存在 $v_{l+2}\notin\{v_1, v_2, \cdots, v_{l+1}\}$，$v_{l+2}$与 C 上一顶相邻，于是出现比 $P(v_1, v_{l+1})$还长的轨，与 $P(v_1, v_{l+1})$最长矛盾，至此证得 G 中有哈密顿轨。

因为 $d(u)+d(v)\geqslant n$ 时，G 中出现哈密顿轨 $v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n$，是最长轨，于是出现 $v_1v_n\in E(G)$或图 3-35 的结构，总之，当 $d(u)+d(v)\geqslant n$ 时，G 中有哈密顿圈，证毕。

联系开始提到的 $2n$ 贪官聚餐问题，由于与之对应的图 G 任二顶次数之和不小于顶数，由奥尔定理，G 中有哈密顿圈，按一条哈密

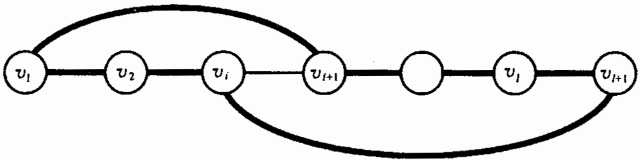

图 3-35

顿圈的顺序入席即可使邻座无怨。