3.22 国际象棋马的遍历

国际象棋的马是否可以遍历，即它从任一格出发跳到每格恰一次又回到出发的那个格子，是否可能？这个问题的答案是肯定的，图3-30给出了马的一种遍历路线图，图3-31中的数目是跳马的次数，说来也妙，每行的和，每列的和皆为260，是一种“幻方”。

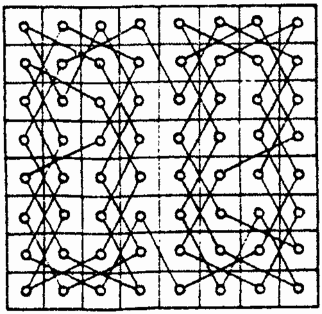

图 3-30

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图 3-31

但在小棋盘上，马就未必能遍历了。

以棋盘每格为顶点，仅当马从甲格能一步跳到乙格时，甲乙两格之间连一边，如此构成的图称为“马图”，马能否遍历等价于马图是否哈密顿图。8×8 的马图是哈密顿图。

2×2 的小棋盘的马图无边，不是哈密顿图。

3×3 的马图中心那个格的马跳不出或马跳不到，所以也不是哈密顿图。

4×4 的马图中四个 c 号顶构成一个圈，见图 3-32，四个 d 号顶构成一个圈，四个 a 号顶皆 2 次顶，每个 a 与两个 b 相邻。如果从这个马图中把四个 b 顶删除，则出现四个 a 号孤立顶和一个 c 号正方形，一个 d 号正方形，共计六个连通片；如果 4×4 的马图中有一个哈密顿圈 C，则 b 们都在 C 上，把 b 都删除，至多产生四个连通片。事实上，即使是一个哈密顿圈，再无不在圈上的边，删去四顶，也至多破碎成四片，如果尚有不在哈密顿圈上的边，则破碎不会增多。如今却产生了六个连通片，这一矛盾证明 4×4 的马图不是哈密顿图。

5×5 的马图也不是哈密顿图，它的四个 a 号顶皆 2 次顶，与四个 b 号顶构成一个八条边的圈 C，把四个 b 删除至少得五个连通片，其中四个是孤立顶 a，见图 3-33，与 4×4 的马图同理，5×5 的马图也不是哈密顿图。

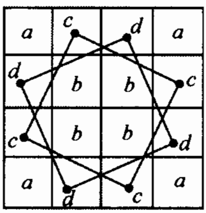

图 3-32

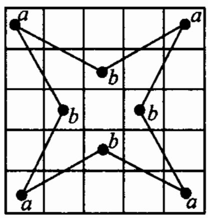

图 3-33

通过上述分析，我们可以建立哈密顿图的一个重要性质：

从 n 顶哈密顿图上任意删除 k 个顶，$k<n$，得到的图的连通片

的个数不多于 k 个。

这条性质反映了哈密顿图靠其哈密顿圈的维系，失去几个顶也不会碎得太厉害，碎片数不超过失掉的顶数，用这一性质判别一图不是哈密顿图时往往见效。

例如在一个正八面体的每个面上贴上一个正四面体，两者的一个面重合，则此 14 顶的多面体以棱为边的图不是哈密顿图；因为删去原来八面体的六个顶，得八个孤立顶，由哈密顿图的性质知此图非哈密顿图。