3.20 贪官聚餐

n 个两两相识的贪官，每天都到一家五星级饭店聚餐，他们围坐在一张圆桌边与邻座交谈权钱之术，他们都希望每天聚餐时换成新的邻座，问这样的聚餐能进行几次？

这些愚不可及的官僚去请教一位图论专家，专家笑曰："这种聚餐至多允许一次。"其实这位搞图论的专家心里十分清楚，如果他们是 11 个人天天来此吃喝，鱼肉百姓，去掉双休日，可以足足进行一周！一般地，若 n 个人这样聚餐，可以进行$\left[\frac{n-1}{2}\right]$天；$[x]$是 x 的整数部分，例如$[3,5]=3$。

下面是$\left[\frac{n-1}{2}\right]$正确性的证明。

以贪官为顶，构成 K_n，问题就是求 K_n 中无公共边的哈密顿圈的个数，K_n 的边数为$\frac{1}{2}n(n-1)$，每个哈密顿圈有 n 条边，所以 K_n 中哈密顿圈的个数不超过$\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$个。

用构造性的办法可以找到$\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$个哈密顿圈，从而知 K_n 中的无公共边的哈密顿圈共$\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$个。

对于 $n=2k+1$，$k\geqslant 1$，图 3-26 的粗实线画出了一个哈密顿

圈，其中 $0,1,2,\cdots,2k$ 代表 K_{2k+1} 中的顶点，这个哈密顿圈是

$$C_1=0,1,2,2k,3,2k-1,4,\cdots,k,k+2,k+1,0。$$

0 在圆心处，$1,2,\cdots,2k$ 是等分圆周的顶点，把此哈密顿圈 C_1 顺时针依次旋转 $\frac{\pi}{k}$，则得到 $k-1$ 个新的哈密顿圈，与 C_1 共计 k 个两两无公共边的哈密顿圈。

对于 $n=2k+2$，$k\geqslant 1$，把第 $2k+1$ 号顶放在 0 号顶的“上空”，如图 3-27，粗线画出一个哈密顿圈 C_2，用上面的旋转法可得 k 个无公共边的哈密顿圈。当图 3-26 中 C_1 从 0 开始运行到左侧距水平直径最近的顶点时，在 $n=2k+1$ 的情形是向右下方运行，$n=2k+2$ 时，改成向 $2k+1$ 运行，再从 $2k+1$ 运行至右下距水平直径最近的顶，再按图 3-26 的方式运行。

综上所述，K_n 中共有 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个无公共边的哈密顿圈，贪官们每次按这些哈密顿圈上的次序入席。

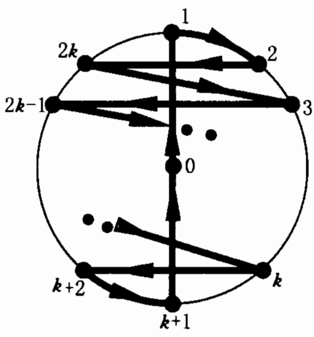

图 3-26

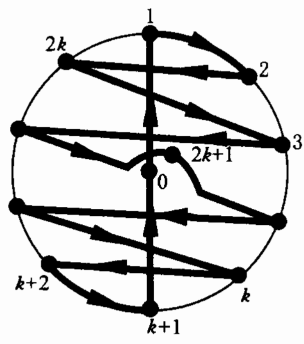

图 3-27

如果这 n 个贪官找来 n 名小姐，并要求每次就餐身旁有两名未邻坐过的小姐，这种排场可以进行几日？

这一问题就是问 $K_{n,n}$ 上有多少无公共边的哈密顿圈。

图 3-28 中画出 $K_{n,n}$ 的一个哈密顿圈，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 名

贪官，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 名小姐，用 K_n 中的旋转法可知 $K_{n,n}$ 中的无公共边的哈密顿圈共计 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个。细节论证与 K_n 的情形相似，建议读者一试。

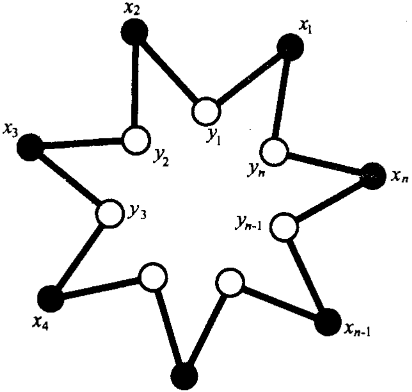

图 3-28