3.19 周游世界

(1) 周游世界游戏的变招儿

设想正 12 面体的每条棱是橡皮筋做成的,正 12 面体每个面都

是正五边形，任取其中一个正五边形，把它向所在平面的各个方向扩张，其他棱受到这个正五边形扩张的牵连，则会变成状似图 3-23 所示的平面图形，尽管图 3-23 一点也不像一个正 12 面体，不过它却反映了与正 12 面体中相同的顶点相邻关系，我们只关心能否周游，至于游走时所经路线的形状与长度，不是我们过问的事，所以哈密顿的玩具与图 3-23 本质上是一回事，即只需考查图 3-23 上是否有含 20 个顶的圈。我们已用粗实线构造出了一个这样的圈，所以哈密顿周游世界的答案是肯定的，但不是唯一的。读者还可以自行构作出其他的含全部顶点的圈。

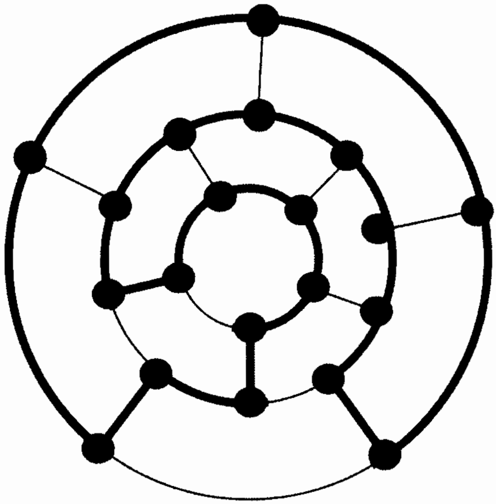

图 3-23

这种含图上每顶的圈称为哈密顿圈，存在哈密顿圈的图叫做哈密顿图，例如奇数个顶的二分图就不是哈密顿图，因为二分图无奇圈。

由于正四面体、正六面体、正八面体和正 20 面体都是哈密顿图，所以还可以把哈密顿周游世界的游戏玩具用所有的正多面体来制

作。

图 3-24 中的粗实线表示哈密顿圈。

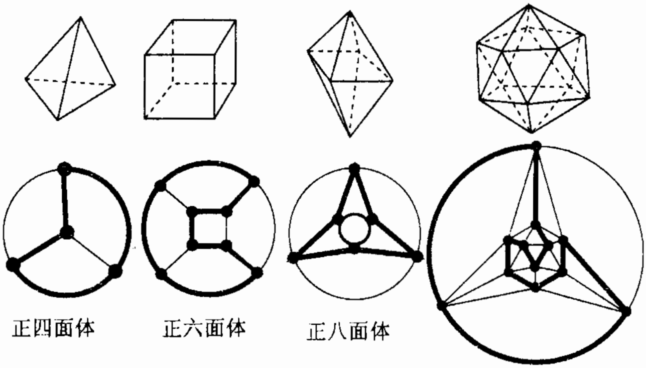

图 3-24

上面的三维立方体(即正六面体)可以推广成 k 维立方体，$k\geqslant2$ 时，都是哈密顿图，图 3-25 中画的是一维、二维、三维、四维立方体，粗实线画出一个哈密顿圈，k 维立方体是如下构作出来的：

一维立方体：是线段，把它的两端分别编码 0，1。

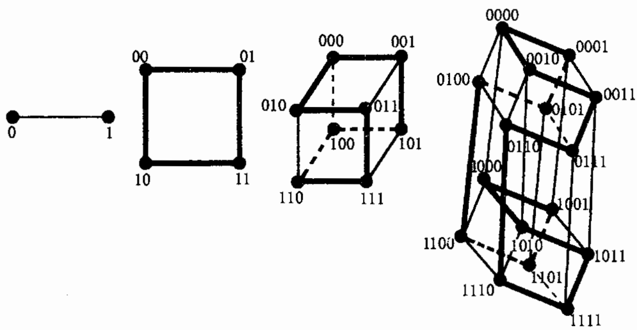

图 3-25

二维立方体：把一维立方体的一个复制品平行地放在其正上方，再把有相同号码的顶之间连一边，且把上方的一维立方体的码加“0

头”，下方的一维立方体的码加“1 头”。

k 维立方体：把 $k-1$ 维立方体的一个复制品平行地放在其正上方，再把有相同号码的顶之间连一边，上方 $k-1$ 维立方体的码加“0头”，下方 $k-1$ 维立方体的码加“1 头”。

k 维立方体一个显著性质是任一边两端点的编码皆由 0，1 组成，且仅在一个相同位置上有不同的数码，由此知其哈密顿圈上的一条含所有顶的轨上的每顶依次变更一个位置上的数码。

由 k 维立方体的这一特点可以得出下面的命题为真：

一个有限非空集合的全部子集可以如此排序，使得任何相邻子集恰相差一个元素。

事实上，设 A 是有限集，A 中共 n 个元素，把每个元素编号，则 A 可表成 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，其中 i 代表编号为 i 的那个元素，若 $B\subseteq A$，约定用长 n 的 $0-1$ 数串表示 B，$i\in B$ 时，数串的第 i 位写 1，否则写 0。A 的全部子集共 2^n 个，每个皆为 n 维立方体的一个顶点，所以 n 维立方体上的一条含所有顶的轨即为 A 的子集之排序。

以后把含图中一切顶的轨称为哈密顿轨。

(2) 22 岁的天文学教授哈密顿

哈密顿，1805 年生于爱尔兰都柏林一个律师家庭。5 岁通拉丁文，14 岁学会了 12 种语言，13 岁阅读牛顿的《普遍算术》一书而对数学产生强烈兴趣，1823 年入都柏林三一学院，对天文学有特殊的天赋和偏爱，大学尚未毕业，即被都柏林大学任命为天文台台长，天文学教授，时年仅 22 岁，1932 年当选爱尔兰科学院院士，后来又当选英国皇家学会会员和法国科学院院士，成为当时成绩卓著的科学大师，由于操劳过度，1865 年去世，年仅 60 岁。

他的著作有 140 余篇，善于处理特殊实例，再把对具体问题的研究方法与结论过渡成为一般理论，他在力学、数学和光学上有杰出贡献，数学上有深远影响的成就是四元数和哈密顿图，所谓四元

数是形如 $t + xi + yj + gk$ 的数，其中 t, x, y, z 是实数，$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, kj = -i, ik = -j, ji = -k$，“四元数”对数学、力学和光学都有重要的应用。

哈密顿重视外语学习，为人谦虚忠厚，重视科研，也重视教学，文章写得好，教书教得好，著作十分畅销，是 19 世纪青年人崇拜的典范人物。