3.18 中国邮路

邮政局一位邮递员选好邮件骑摩托车去投递,局长要求他把辖区内每个街道都要至少投递一次,且尽快返回邮局,请为这位邮递员设计一种投递路线。

上述问题就是中国邮路问题。这一问题由我国数学家管梅谷先

生于1960年首次提出并进行了研究,且引起了世界上许多数学家的兴趣。1973年,埃德蒙兹(Edmonds)和约翰逊(Johnson)对中国邮路问题给出了一种有效的解法。

与中国邮路问题的味道有些相似,但却比中国邮路问题难解得多的问题是下面所谓的货郎问题:

百货货郎担着挑子去卖货,他要把所有村子全走遍,再返回家中,试为这位货郎设计一条售货路线,使其行程最少。

货郎问题已经难倒了所有的数学家,看来离解决之日不知还有多少年代!

与货郎问题有密切关系,有趣又能解的一个问题是哈密顿周游世界问题:

1857年,爱尔兰著名数学家哈密顿(W.R.Hamilton1805~1865)发明了一种注册为"周游世界"的玩具,在正12面体的20个顶点上分别标注北京、东京、柏林、巴黎、纽约、旧金山、莫斯科、伦敦、罗马、里约热内卢、布拉格、新西伯利亚、墨尔本、耶路撒冷、爱丁堡、都柏林、布达佩斯、安亚伯、阿姆斯特丹和华沙,要求从以上20个遍布世界的大都市中某一个城市出发,沿正12面体的棱行进,每城只到一次,再返回出发地。

哈密顿把这项专利卖给一个玩具商,得酬金25个金币,但由于这个游戏的数学含量高,大多数数学素质欠佳的市民玩不好,所以销路不佳,但在数学史上,哈密顿周游世界的游戏与欧拉的七桥问题是两例标志性建筑,播下了图论诞生与发展的种子。

(1) 欧拉回路与欧拉行迹

在七桥问题中,每桥恰过一次再回到出发点实属不可能的事,但如图3-3所示,再修筑两座桥,则可以每桥恰过一次再返回出发点了。用图论的术语谈,即可以每边恰过一次再返回出发的顶,能做到这种旅游的图称为欧拉图,所行路线称为欧拉回路。如果从一顶出

发可以一次性地行遍所有的边，但终止于与出发顶相异的另一顶，则此所行路线称为欧拉行迹，有欧拉行迹的图可以“一笔画”。

欧拉图显然是连通的，而且由于每顶在欧拉旅游当中“出”与“进”的次数相等，所以每顶皆偶次，反之，若 G 是每顶皆偶次的连通图，则 G 必为欧拉图，事实上，由 G 是每顶皆偶次的连通图，则它没有零次顶(孤立顶)，每顶次数至少为 2，于是 G 上有圈 C_1，从 G 上把 C_1 上的边删除得图 G_1，G_1 仍是每顶皆偶次，G_1 的有边连通片仍是每顶皆偶次的连通图，G_1 上有圈 C_2，把 C_2 的边从 G_1 上删除得 G_2，如此以往，有限次之后，得到了孤立顶 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，而 G 中的边全部删掉了，可见 G 是由无公共边的圈 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 并成的。由于 G 连通，所以 C_1 必与 $C_2, \cdots, C_k$ 中某一圈有公共顶，例如 C_1, C_2 有公共顶，则 $C_1 \cup C_2 = C_{12}$形成一个欧拉型回路，即从其上任一顶出发沿其上的边行进，每边恰通过一次即可返回出发的顶，同理 C_{12}与 $C_3, \cdots, C_k$ 中某圈例如 C_3 有公共顶，于是 $C_{123} = C_{12} \cup C_3$ 是欧拉型的回路，如此递推知 $C_{123\cdots k} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots \cup C_k$ 是G 的欧拉回路，即 G 是欧拉图。

从上述论证容易看出以下结论：

结论 1　G 是欧拉图的充要条件是G 是每顶皆偶次的连通图。

结论 2　G 是欧拉图的充要条件是G 是由两两无公共边的圈并成的连通图。

结论 3　G 可以一笔画的充要条件是G 是至多两个奇次顶的连通图。

在图 3-19 中，3-19(a)可以一笔画，而 3-19(b)不可能一笔画，因为 3-19(b)中有四个 3 次顶(在外围四个角上)，而 3-19(a)中恰两个奇次顶，如果你有兴趣，请在 3-19(a)图上执行一笔画，一笔画即使可行，也不总是可以轻易完成的，需要动用一点小聪明。

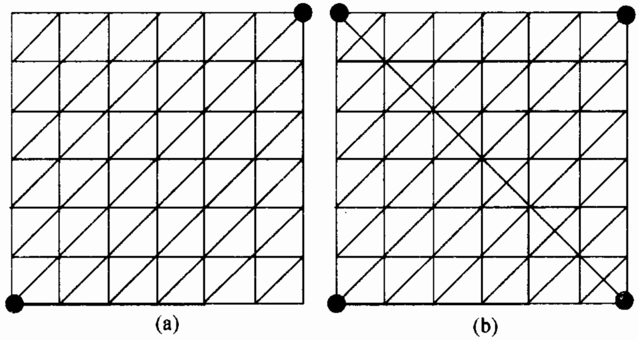

图 3-19

(2) 中国邮路设计

①求取欧拉图上的中国邮路。

如果需要邮递的图是一个欧拉图，那么只需求出它的一条欧拉回路即可，当然，欧拉回路也不是可以随便得到的。例如图 3-20 是一个欧拉图，从邮局 v_0 出发，首先通过 e_1 到达 v_4，我们约定通过一边时，相当于把此边染红，再把与 e_1 相邻的 e_6 染红，到达 v_1；再把 e_2 染红，到达 v_0，这就糟了，e_3, e_4, e_5 这三条街就去不了啦。事实上，e_2 是染红 e_1 与 e_6 后无色边们导出的图的"桥"，这样提前过桥必然造成不能把每边一次性行遍再回邮局的后果，正确的办法是过了 e_1 边，e_6 边之后可过 e_5；这时无色边 e_2, e_3, e_4 的导出图每边都是桥，不得已只能选无色图的桥 e_4, e_3, e_2 了。

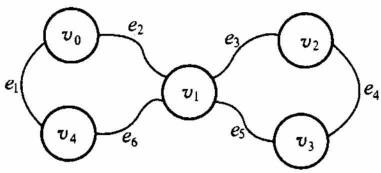

图 3-20

我们从此悟出一个要领：投递时，非不得已时，不要过早地去投递未投递过的边们导出的子图的桥，因为桥只允许通过一次，如果提前过桥，会造成"对岸"一些未投递的街道不能再去投递的后果。

总结成如下算法：

算法 1 从指定顶(邮局) v_0 出发，任取一条与 v_0 关联的边 e_1，把 e_1 染成红色；再选 e_1 的另一端点 v_1 关联的边 e_2，如果不是已无选择的余地，不要选无色子图的桥为 e_2，把 e_2 染成红色。

算法 2 选与 e_2 端点 $v_2(\neq v_1)$ 相关联的无色边 e_3，如果不是已无选择的余地，不要选无色子图的桥为 e_3，把 e_3 染成红色。

算法 3 如上递推地直至把全图的边染红为止，按所选边的先后次序，$e_1, e_2, \cdots, e_m$ 即为一条红色的中国邮路，其中 m 是全图的边数。

②求取非欧拉图上的中国邮路。

设邮递员需要投递的街区是连通图 G，每个街口是 G 的顶，每条街是 G 的边，每街 e 的长度 $l(e)$ 是 e 的权，我们欲求从 v_0 出发的一条回路使得回路总路程最少，若 G 不是欧拉图，则必然会有某些边在回路上不止一次地出现。

下面以实例说明“进口的”一种方法，它是由匈牙利数学家埃德蒙兹等人首创的。

考虑图 3-21 上的中国邮路，边旁数字是各边边长，v_1, v_2, v_3, v_4 是四个 3 次顶，所以此图不是欧拉图。应在 v_1 与 v_4，v_2 与 v_3 之间各添加一条轨，或在 v_1 与 v_2，v_3 与 v_4 之间；v_1 与 v_3，v_2 与 v_4 之间分别添加一条轨，才能使其成为欧拉图，添加的边权之和应最小，再按上段的欧拉图中国邮路来解决，实际操作如下：

步骤 1 求 G 中奇次顶集 $V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$。

步骤 2 求 V_0 中每对顶的距离：

$d(v_1, v_2) = 4$, $d(v_1, v_3) = 5$, $d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_2, v_3) = 3$, $d(v_2, v_4) = 5$, $d(v_3, v_4) = 3$。

步骤 3 以 V_0 为顶集，作加权完全图，各边之权即步骤 2 中各顶间的距离，如图 3-22。

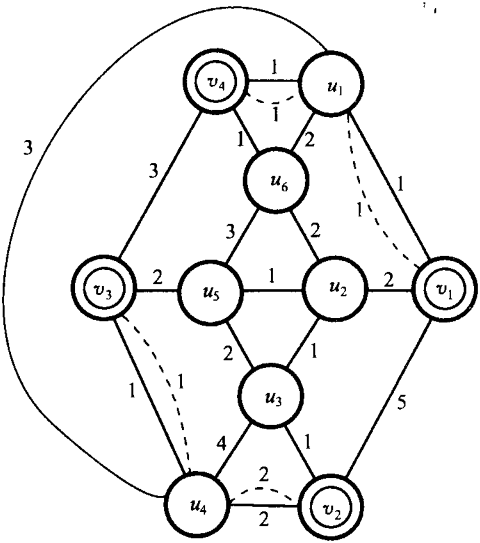

图 3-21

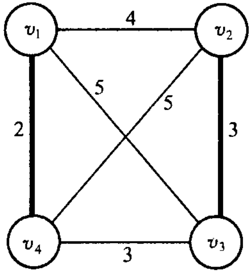

图 3-22

步骤 4 求出图3-22中 $K_{|v_0|}$ 上的最小权的完备匹配，$M=\{v_1v_4, v_2v_3\}$。

步骤 5 求 G 中 v_1 与 v_4 之间和 v_2 与 v_3 之间的最短轨：$P(v_3, v_4)=v_1u_1v_4, P(v_2, v_3)=v_2u_4v_3$。

步骤 6 在 G 中把 $P(v_1, v_4)$上的边变成同权双边，$P(v_2, v_3)$亦然，图 3-21 中的虚线是添加的新边，于是得到加权欧拉图 G'。

步骤 7 在 G' 上取一条欧拉回路 C 即为所求

$$C=v_1u_1v_4v_3u_4v_2v_1u_2u_3v_2u_4u_3u_5v_3u_4u_1v_4u_6u_5u_2u_6u_1v_1$$