3.17 瓶颈理论和婚配定理

(1) 瓶颈理论和双最定理

通过铁路把产地的商品发往市场，假设途中火车的运载不发生增减，每一路段单位时间的运量有一定限度，如何确定全路网上由产地到市场的运输方案，使得单位时间内运达的货物最多。

把铁路网视为一个有向图 G，产地 s 是始发站，$s \in V(G)$，市场 t 是终点站，$t \in V(G)$，每一路段 e 是 G 的一条有向边，其运量限度为 $c(e)$，如此加权 $c(e)$的有向图亦称一个有向网络。

设 $s \in S, t \in T, S \cup T = V(G), S \cap T = \varnothing$，则尾在 S，头在 T 的边们形成的边子集记成(S, T)，(S, T)叫做网络的“截”，(S, T)中各边的容量 $c(e)$之总和称为截量，在一切截中，截量最小的截(S_0, T_0)称为瓶颈，(S, T)上的截量记成 $C(S, T)$，单位时间内运到 t 的净流量记成$F(G)$，则对任何截，任何运输方案

$$F(G) \leqslant C(S, T)$$

由此可知，当上式等号成立时，$C(S, T)$即最小截量，$F(G)$即单位时间的最大运输流量，于是有下面的重要结论：

瓶颈上的容量总和即是全路单位时间从始发站运往终点站的最大运输量。

或曰：最大流量等于最小截量。所以上述瓶颈理论亦称“双最定理”。

瓶颈理论是图论和经济管理当中的核心理论之一，它有许许多多精彩应用。匹配技术中的婚配定理就是它的一个推论。

(2) 婚配定理

城中每位小伙子都爱慕 k 位小姐，每位姑娘都爱慕 k 位小伙子，那么这些未婚青年都会与自己爱慕的人儿结婚。

这就是霍尔(Hall)婚配定理。它的数学模型是每顶皆为 k 次的二分图$G(V, E)$上必有完备匹配。

下面用瓶颈理论证明婚配定理是真的。

显然这些未婚青年，男女各半；事实上，由于 $k|X| = k|Y| = \varepsilon$，

其中 X 是小伙子集合, Y 是姑娘集合(G 中一顶的邻顶是该顶爱慕的人), $|X|$表示 X 的元素个数, ε 是G 的边数;所以 $|X|=|Y|$。

我们设计一个相关的网络:

在 $G(V,E)=G(X\cup Y,E)$中添加两顶 s 和 t, 把 G 中的边定方向, 每边皆从 X 指向 Y; s 为尾, X 中每顶为头, 添加 $|X|$ 条有向边, t 为头 Y 中每顶为尾, 添加 $|Y|$ 条有向边;添加的有向边上的容量皆为 1, $G(X\cup Y,E)$中的边之容量皆为无限大, 见图 3-17。

只欠证明:

①图 3-17 中的网络之最大流量即为 $G(X\cup Y,E)$上的最大匹配中的边数。

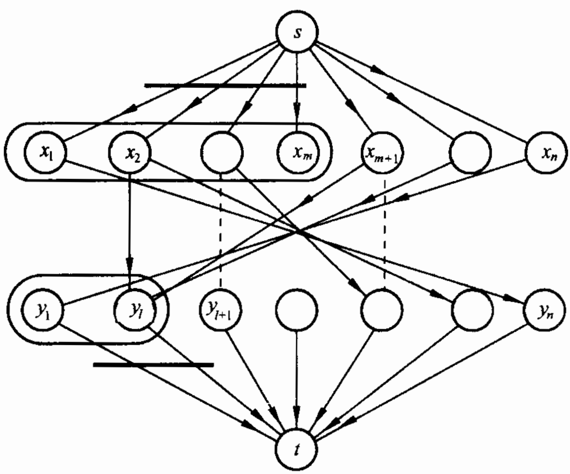

图 3-17

②图 3-17 上网络之最小截量为 n, 其中 $n=|X|$。

如果证出①与②, 则由双最定理, $G(X\cup Y,E)$上的最大匹配有 n 条边, 即为完备匹配, 就是说相配每对儿都是互相爱慕的人儿, 而且没有未被许配的姑娘。

①若 M 是 $G(X\cup Y,E)$中的最大匹配, 对于 M 中的每条边

xy，通过有向轨 $sxyt$ 可从 s 向 t 运送 1 个单位的货物，可见最大流量 $F \geqslant |M|$。

因从 s 到 t 的有向轨皆形如 $sxyt$，若在 $sxyt$ 上已通过一个流量，则不会同时在 $sxy't$ 与 $sx'yt$ 上也运送一个流量，因为 x 顶与 y 顶同时中转的货物最多为 1（注意 sx 与 yt 容量仅为 1），故 $G(X \cup Y, E)$ 中同时运送 1 单位货物的边们构成一个匹配，所以最大匹配 M 满足 $|M| \geqslant F$。

$|M| \geqslant F$，$|M| \leqslant F$，故只有 $|M| = F$。即最大流量就是 $G(X \cup Y, E)$ 中的最大匹配的边数。

②$S = s$，$T = X \cup Y \cup \{t\}$ 则 (S, T) 是一个截，即切断 (S, T) 中的所有边，则截断从 s 到 t 的运输，这个截就是一个最小截，即瓶颈。

因为 X 到 Y 的边容量为 ∞，所以这种边不在最小截中，如果 $(X \cup Y \cup \{s\}, \{t\})$ 是最小截，截量与 $(\{s\}, X \cup Y \cup \{t\})$ 的截量一致，都是 n，如果这两个截不是最小截，则最小截中的边，一部分以 s 为尾，另一部分以 t 为头。设它们是 $sx_1, sx_2, \cdots, sx_m$，$1 \leqslant m < n$，y_1t，$y_2t, \cdots, y_lt$，$1 \leqslant l < n$；若 $m + l < n$，我们来找矛盾。这时在 $G(X \cup Y, E)$ 中，$x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 的每个邻顶皆在 $\{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ 中，不然此最小截截不断由 s 向 t 的运输。又 G 中每顶皆 k 次，则与 $\{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ 各顶关联的边之总数至少 $k(n-m)$ 条，又 $l < n - m$，则 $\{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ 中各顶关联的边之总数多于 kl 条，这与 G 中每顶皆 k 次，l 个顶 $y_1, y_2, \cdots, y_l$ 的关联边恰 kl 条矛盾，至此知②成立，即 G 的最小截中恰 n 条边。

下面是婚配定理的一些具体应用

【应用 1】 署名问题。

数学杂志社悬赏征解八个问题，过了些日子，编辑部收到了每题的两个正确解答，16 个解答是由八人寄来的，每人寄来两道题的解答。编辑决定每题只发表一种答案，而且希望因为解答被发表而使

八人都得奖，这可能吗？

完全可以巧妙安排，使八人都得奖，事实上，以题目构成 X 集，投稿人构成 Y 集，当且仅当 $y \in Y$ 解答了 x_i, x_j 两题时，连 x_iy, x_jy 两条边，这样得到了每顶皆两次的二分图，由婚配定理，此二分图中有完备匹配 M，当 $xy \in M$ 时，对 x 题发表 y 的答案，则会使人人得奖。

至于如何求取二分图中的完备匹配，或怎样求网络中的最大流和瓶颈，有兴趣的读者可以参考《图论及其算法》(王树禾，中国科学技术大学出版社 1990 年版)的有关章节。

【应用 2】 碉堡选址。

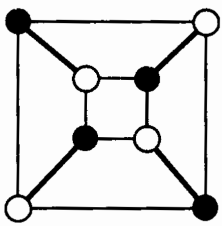

图 3-18

有一街区如图 3-18 所示，其中所有街道都是直线段，为控制巷战，我军最少应在哪些街口修筑碉堡，即可控制所有的街道？

以每个街口为顶点，每条街为边构成一个图 $G(V,E)$，G是每顶三次的二分图，四个○号顶组成 X 集，四个●号顶构成 Y 集，由婚配定理，G 中有完备匹配，例如四条粗实线即是一个完备匹配；在四个○型顶处修筑碉堡或在四个●型顶处修筑碉堡即可。事实上，这样做已经可以控制所有街道，因为 X 中的全体顶或 Y 中的全体顶关联的边包含二分图 G 中的所有边。但若再少修一碉堡，则不能控制全部街道，因为三个顶只能控制完备匹配中的至多三条边，完备匹配中至少还有一条边不能被三个顶中的任何一顶控制，可见我们的方案是最佳的，即碉堡数已最少，又能全面控制巷战。

【应用 3】 龟兔混合接力比赛。

一只龟与一只兔为一队，进行 100 米的接力比赛，每只兔认识 10 只龟，每只龟认识 10 只兔，龟兔们都希望和自己的相识者搭档组队，能否使 20 位运动员都如愿？如果能，若限制每对龟兔只能合作一

次，这种比赛最多能进行几轮？是否每对龟兔朋友都合作过？

龟兔们个个都能如愿以偿，事实上，以龟组成 X 集合，以免组成 Y 集合，以 $X\cup Y$ 为顶集构作一个二分图 $G(X\cup Y, E)$，仅当龟兔相识时，在相应二顶之间连一边，则 G 是每顶皆 10 次的二分图，由婚配定理，G 中存在完备匹配 M_1，按 M_1 相配的方式组队进行第一轮比赛，把 M_1 的边从 G 中删除，得到每顶皆 9 次的二分图，其上有完备匹配 M_2，按 M_2 相配的方式组织第二轮比赛；可见，最多可组织 10 轮比赛。每对龟兔朋友都组队参加过比赛。

【应用 4】 16 棋子问题。

国际象棋盘上有 64 个格子，从中选出 16 个格子，使得每行每列含其中的两个格子；把八个黑子和八个白子放在这 16 个格子上，是否可以使得每行有一白一黑，每列也有一白一黑两个棋子呢？

答案是肯定的，以棋盘的每一行为一个顶，组成 X 集合，以每一列为一个顶，组成 Y 集合，构造一个二分图 $G(X\cup Y, E)$，仅当行与列的公共格子是选定的那 16 个格子之一时，在此二顶间连一边，此边用对应的那个“选定的格子”来标志，于是 $G(X\cup Y, E)$是每顶皆两次的二分图，由婚配定理，G 中有完备匹配 M_1，把 M_1 中的八条边对应的格子中各放上一个白子。把这八条边从 G 上删除，则得到一个每顶皆一次的二分图，有完备匹配 M_2，M_2 中的八条边对应的格子里各放一只黑子，这样每行每列都有一白一黑两个棋子。