3.16 错装了信笺

某人给六个人各写一封信，又写好六个信封，问有多少种可能，使得向信封里插入信笺时，每封信的信笺与信封上写的收信人都不相符？

设 x_i 是信笺，y_i 是信封，x_i 与 y_i 相符，$i=1,2,\cdots,6$，以 x_i，y_i 为顶，仅当 x_i 与 y_i 不相符时，在 x_i 与 y_i 之间连一边，得一二分图 G，见图 3-16。

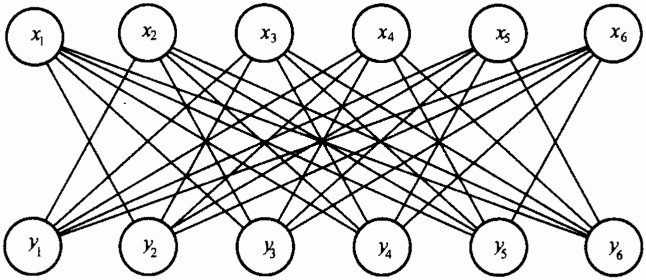

图 3-16

问题化成图 3-16 中有多少完备匹配,我们把完备匹配的个数记作 $\varphi(6)$, x_1 与 y_2 相配时,完备匹配的个数等于从 G 中删去 x_1 与 y_2 这两个顶之后得的图 $G_{x_1y_2}$ 中的完备匹配的个数,把这个数记成 $\psi(5)$;在 $G_{x_1y_2}$ 中,若 x_2 与 y_1 相配,则 $\psi(5)=\varphi(4)$,若 x_2 不与 y_1 相配,则 $\psi(5)=\varphi(5)$。于是 x_1 与 y_2 相配时,得到 $\varphi(5)+\varphi(4)$个完备匹配,同理 x_1 与 y_j ($3\leqslant j\leqslant 6$) 相配时亦有 $\varphi(5)+\varphi(4)$个完备匹配,故

$$\varphi(6)=5[\varphi(5)+\varphi(4)]$$

同理 $\varphi(5)=4[\varphi(4)+\varphi(3)]$, $\varphi(4)=3[\varphi(3)+\varphi(2)]$, $\varphi(3)=2[\varphi(2)+\varphi(1)]$,而 $\varphi(2)=1$, $\varphi(1)=0$,故 $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=9$, $\varphi(5)=44$, $\varphi(6)=265$。即有 265 种错放信笺的可能。

一般而言,对于任意的 n 封信,全把信笺放错的可能有 $\varphi(n)=(n-1)[\varphi(n-1)+\varphi(n-2)]$种。因为 $\varphi(n)>(n-1)!$ 当有 11 封信时,错放的可能超过 3628800 种,每分钟错放一次,也要超过 6 万小时才能把所有可能都显示一遍,这当然是几乎不可能实现的事了。