3.15 乱点鸳鸯谱

开学之初,全班同学排座位,同桌至多坐两位同学,可能出现每张桌子都有两位同学,也有可能有一些桌子只安排一位同学。这正是数学上匹配与许配概念的原始模型之一。我们把有同桌同学的桌子组成的集合称为匹配集合,简称匹配。

把实际模型概括抽象后得出下面的匹配概念,它是离散数学的重要内容。

所谓图 G 的一个匹配,是指边子集 $M=\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}\subseteq E(G)$,其中任两边无公共端点,匹配边形象地称为"对儿集"或"鸳鸯集",如果 G 中已无匹配 M',使得 M' 中的边数比 M 的边数多,则称 M 是 G 的一个最大匹配;匹配 M 中一条边的两个端称为在 M 中相配,每个端点称为被 M 许配;把 G 的每顶皆许配的匹配称为完备匹配。

(1) K_{2n}与$K_{n,n}$中完备匹配的个数

K_{2n}中任一顶有 $2n-1$ 种被许配的方式，选定一种许配后，剩下的尚未许配的顶有 $2(n-1)$个，它们在一个 $K_{2(n-1)}$中，相似地 $K_{2(n-1)}$中的任一顶有 $2n-3$ 种许配方式，如此递推知 K_{2n}中不同的完备匹配的个数是$(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1=(2n-1)!!$ 个。

例如 K_{18}中有 34459425 个不同的完备匹配。

对于 $K_{n,n}$，由于其任一顶有 n 种许配方式，一旦选定一种许配后，还有 $2(n-1)$个顶未被许配，这 $2(n-1)$个顶在 $K_{n-1,n-1}$中，递推地可知 $K_{n,n}$中不同完备匹配的个数是$n!$

例如 $K_{10,10}$中不同的完备匹配的个数有 3628800。

(2)树上完备匹配不超过 1 个

从上我们可知道，K_{18}，$K_{10,10}$这种不超过 20 个顶的图中，不同的完备匹配的个数竟有百万千万之多，但也有的图类中，完备匹配个数极少，例如任一树，其上至多一个完备匹配。

事实上，树 T 上若有两个完备匹配M_1 与 M_2，则从 $M_1\cup M_2$ 中删去 $M_1\cap M_2$ 中的边之后，所得的边子集不空，以这个边子集为边集，以这个边子集中边的端点组成顶集所成的子图(称为此边子集的导出子图)G 中每顶皆两次，故 G 中有圈，与 T 是树相违，所以 T 上不会有两个不同的完备匹配 M_1 与 M_2，至多一个完备匹配；无完备匹配的树当然不少，例如奇数个顶的树上必无完备匹配。