3.14 追捕逃犯

逃犯若干，在公路网上逃窜，问最少派几名刑警，才能保证把逃犯全部抓获归案？或曰纵横交错的河道中有大鱼若干条，渔翁最少要准备几张与河面一样宽的渔网，才能把这些鱼全捞上来？

我们把上述公路网或河道网视为一个无向图 G，所需刑警的最小值记为 $h(G)$。

如果 G 是一条轨道，只要一名持枪刑警从此轨的一端向另一端追捕即可，即 $h(\text{轨})=1$。

如果 G 是一个圈 C，则派一刑警在 C 上一个顶处堵截，这个圈已被切断成一轨，所以还需另一刑警参加追捕，即 $h(\text{圈})=2$。

如果 G 是星形图，即 G 是只一个顶不是叶的树，则一刑警在星的非叶顶处堵截，另一刑警逐条边进行追捕即可，即 $h(\text{星})=2$。

下面用捞鱼的语言来谈（更方便一些），确知无鱼的边称为 0 型边，不知是否有鱼的边称为 1 型边。与一顶关联的边皆 0 型时，该顶处的渔网可以拿走用于他处，与一顶关联的边中只一条 1 型边，则可把该顶上的网沿此 1 型边拖至邻顶，以上两种动作称为在该顶上“起网”。

图 G 上添加一条边 e 后得 $G+e$，显然有 $h(G)\leqslant h(G+e)$。对于完全图 K_n，先从其一顶 v 用 $n-1$ 张网沿与之关联的 $n-1$ 条边拖至 v 的各邻顶，则这些边全成了 0 型边，且得到了由 1 型边组成的 K_{n-1}，这 K_{n-1} 上每顶处有一张网堵截，再拿一张网来，在此 K_{n-1} 上

逐条边拖捞一遍即可,由此可知 $h(K_n) \leqslant n$,而且

$$\delta(G) \leqslant h(G) \leqslant \triangle(G) + 1$$

其中 $\delta(G)$与$\triangle(G)$分别是 G 中顶的最小次数和最大次数。

下面着重讨论所谓“树上追逃”,不妨设树 T 不是轨且 T 上无二次顶,$h(T)$的求法如下:

①把 T 的叶全删除得树 T_1,若 T_1 是一条轨或一个顶,止;否则执行②。

②用 T_1 扮演 T 的角色,执行①。

③反复执行①与②,止时,若被删过叶的树共 k 棵,则 $h(T) = k + 1$。

例如图 3-15 上可以给出 T_0 上具体的追捕过程。

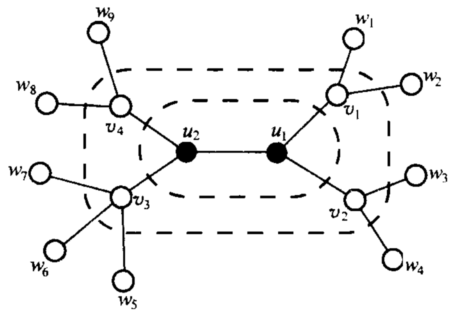

图 3-15

第一批删除的叶是 $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9$,是沿用虚线的那个较大的圈子把它们剪掉的;第二批删除的叶是 v_1, v_2, v_3, v_4,是沿较小的虚线圈子把它们剪掉的;至此得一轨 u_1u_2,止,于是 $h(T_0) = 2 + 1 = 3$,即用三张网即可把此树状河道中的大鱼全部捞出。

捕捞过程是:在 u_1 处截一网,在 v_1 处截一网,再用第三张网在边 v_1w_1, v_1w_2 上拖网把 v_1w_1, v_1w_2 变成 0 型边;这时v_1 起网,把

截在那儿的网拖至 u_1 处，u_1v_1 变成零型边，u_1 处留下一网堵截，v_2 处插一网堵截与上面过程相似地把 $v_2w_3v_2w_4$ 变成 0 型边，继而把 u_1v_2 变成 0 型边；这时把 u_1 处的网拖至 u_2，u_1u_2 变成 0 型边；从 u_2 分叉出去的枝杈上的捕捞过程与上面类似进行，用三张网就完成了捕捞全过程。

直观地，$h(T)$等于剪叶时的“虚圈”个数加 1。

如果 G 不是树，则 G 上有圈，于是可先在圈的一顶上堵一网，这时此圈被破，如此把全部圈破掉后，得到的是树或林，再用上面对树的捕捞方法进行。破圈时可以先用求取最优生成树的算法(设每边权皆 1)求得一个生成树，把破圈的网插在每条无色边(树是绿边)的一个端点上，且使得用网最少即可，不过这一方法用的总网数只是 $h(G)$的近似。