1.6 清点太阳神的牛群

1773年,有人发现了一册宝贵的古希腊文献的手抄本,上面记载了所谓“阿基米德分牛问题”,阿基米德曾把这一问题送给古希腊亚力山大城的天文学家厄拉多塞尼,向这位亚力山大的名人挑战。

分牛问题转述如下:

西西里岛的草地上,太阳神的牛群中有公牛也有母牛,公牛母牛都是白、黑、花、棕四种毛色;白色公牛多于棕色公牛,多出的头数是黑色公牛的$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$;黑色公牛多于棕色公牛,多出的头数是花公牛的$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$;花公牛多于棕色公牛,多出的头数是白色公牛的$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$;白色母牛是黑牛的$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$;黑色母牛是花牛的$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$;花母牛是棕色牛的$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$;棕色母牛是白色牛的$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$。

朋友,如果你自恃还有几分聪明,请准确无误地清点太阳神的牛群,看各色公牛与母牛各是几头?

上述分牛问题的数学模型如下:

设x_1, y_1, z_1, t_1分别是白、黑、花、棕四色公牛的头数,x_2, y_2, z_2, t_2分别是白、黑、花、棕四色母牛的头数。则这八个未知数应满足

不定方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - t_1 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) y_1 & (1.8) \\
y_1 - t_1 = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}\right) z_1 & (1.9) \\
z_1 - t_1 = \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7}\right) x_1 & (1.10) \\
x_2 = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right)(y_1 + y_2) & (1.11) \\
y_2 = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}\right)(z_1 + z_2) & (1.12) \\
z_2 = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6}\right)(t_1 + t_2) & (1.13) \\
t_2 = \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7}\right)(x_1 + x_2) & (1.14)
\end{cases}
$$

(1.8),(1.9),(1.10)是关于 x_1, y_1, z_1, t_1 的不定方程组,之中无 x_2, y_2, z_2, t_2 参与,可以独立求解;之后,再把 x_1, y_1, z_1, t_1 代入(1.11),(1.12),(1.13),(1.14)。由(1.8),(1.9),(1.10)得

$$
x_1 = \frac{742}{297} t_1, \quad y_1 = \frac{178}{99} t_1, \quad z_1 = \frac{1580}{891} t_1
$$

由于 $\dfrac{742}{297}, \dfrac{178}{99}, \dfrac{1580}{891}$ 都是既约分数,所以 t_1 能被 99, 297 和 891 除尽,故应取 $t_1 = 891t$, t 是正整数,这时

$$
x_1 = 2226t, \quad y_1 = 1602t, \quad z_1 = 1580t, \quad t_1 = 891t \tag{1.15}
$$

把(1.15)代入(1.11),(1.12),(1.13),(1.14)得

$$
\begin{cases}
12x_2 - 7y_2 = 11214t & (1.16) \\
20y_2 - 9z_2 = 14220t & (1.17) \\
30z_2 - 11t_2 = 9801t & (1.18) \\
42t_2 - 13x_2 = 28938t & (1.19)
\end{cases}
$$

由(1.16),(1.17),(1.18),(1.19)解得

$$x_2=\frac{7206360}{4657}t,\quad y_2=\frac{4893246}{4657}t$$

$$z_2=\frac{3515820}{4657}t,\quad t_2=\frac{5439213}{4657}t$$

由于$\frac{7206360}{4657}$是既约分数,所以可令 $t=4657\tau$,其中 τ 是正整数。于是得各种牛的数目为

$x_1=10366482\tau$, $y_1=7460514\tau$, $z_1=7358060\tau$, $t_1=4149387\tau$;

$x_2=7206360\tau$, $y_2=4893246\tau$, $z_2=3515820\tau$,

$t_2=5439213\tau$; $\tau=1,2,3,\cdots$

即使 $\tau=1$,太阳神的牛最少也有 50389082 头,小小西西里岛岂能容得下 5000 多万头牛,显然这是天才的阿基米德为了戏弄厄拉多塞尼等人而杜撰的数学游艺题;从题文也可看出破绽,其已知数据为$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$,$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$,$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$,$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$,$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$,实际问题哪会有这么凑巧的已知数据。

在本题的假设之下,各种牛的最少头数为:

白公牛:10366482, 白母牛:7206360,

黑公牛:7460514, 黑母牛:4893246,

花公牛:7358060, 花母牛:3515820,

棕公牛:4149387, 棕母牛:5439213。