3.11 一共生成几棵树

(1) 生成一棵树要做些什么

如果一个图 G 的生成子图是一棵树 T，则称 T 是 G 的生成树，也称为支撑树。

一个图 G 是连通图的充要条件是 G 有生成树。

事实上，因为树是连通的，若 G 有生成树，G 显然是连通图；反之，若 G 是连通图，前面我们已经做过，用删去 G 中圈上的边的办法

则可得到 G 的一个生成树。至此证明了图连通与该图有生成树等价。

但具体找一棵生成树时，却不能用在该图上从圈上删边的办法办，事实上，找出图上的圈绝非易事，下面我们模拟自然界中一棵树的生长过程，“仿生”地生成一棵支撑树：

①任取一顶 $v_1 \in V(G)$，其中 G 是连通图。

②把与 v_1 关联的边及其端点全染成绿色，得一小树 T_1。

③选 T_1 的一个叶 v_2，v_2 在 G 中的次数不小于 2，把与 v_2 关联的边中一端无色的一条边及其无色端点染成绿色得树 T_2。

④逐次依上述方式染绿一些边和顶，直至染绿了 $\nu-1$ 条边为止，其中 ν 是 G 的顶数，绿色子图即为 G 的一棵生成树。

在现代数学当中，把一组有穷的操作步骤叫做一个算法；我们不再把算法仅仅理解为算术或代数等运算法则了，还要承认有（例如上述求取生成树的）所谓行为算法。

(2) 完全图有几棵生成树

$\triangle ABC$ 的生成树共 3 棵，见图 3-10。

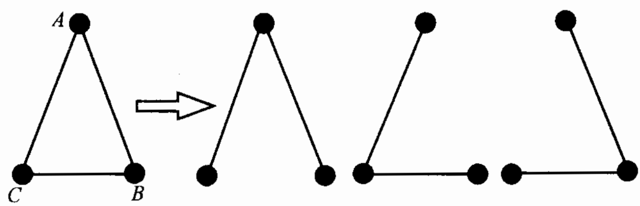

图 3-10

K_4 的生成树共 16 棵，见图 3-11。

请读者动手画出 K_5 的所有的生成树。

我们经验地归纳一下：K_3 的生成树个数是 $3=3^{3-2}$，K_4 的生成树的个数是 $16=4^{4-2}$，猜想 K_5 的生成树个数为 $5^{5-2}=125$ 个，K_6 的

生成树则有 $6^{6-2}=1296$ 个。对一般情形，数学家凯莱(Cayley)证明了 K_n 生成树的个数为

$$\tau(K_n)=n^{n-2}$$

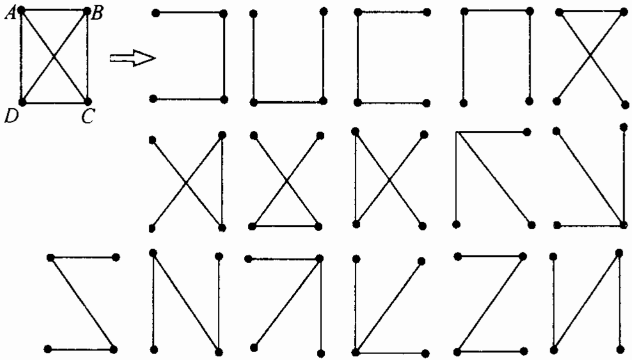

图 3-11

于是 $\tau(K_{10})=10^8$，一个小小的十顶图，竟有一亿棵不同的生成树。如果有人要求我们画出 K_{10}的全体生成树，每页纸上画十棵，需要一千万张纸，我们哪有这么多钱去买这么多纸！我们哪有这么多工夫去画这么多树！我们已经领教了一个图中所含的信息量是多么丰富。