3.10 树的数学

树木森林是生态平衡的基础，风调雨顺消灾繁荣的保障，世上找不出不喜欢树的人。现在我们数学地研究树的性质和应用，树在数学家的心目里是一个重要的数学关键词，但它的原型就是窗外一棵棵枝繁叶茂的绿色树木，我们只不过用大画家毕加索的名画《公牛》的创作手法进行特征提炼来定义树。

无圈连通图称为树，一次顶称为叶，每个连通片皆树的不连通图叫做林。

树有丰富的数学性质。

(1) 树有叶

考虑顶数不少于 2 的树 T，一方面，如果它没有叶，则是一个每顶次数至少为 2 的连通无圈图；另一方面，任取两顶 $u, v \in V(T)$，设 $P(u, v)$是从 u 到 v 的最长轨，则由 $d(v) \geqslant 2$，还有一条边 e 不在 $P(u, v)$上，e 的另一端 w 一定在 $P(u, v)$上，不然 $P(u, v)$还可以延长，与 $P(u, v)$的最长性相违；由 w 在$P(u, v)$上可知，T 上有圈，与 T 是树相违，故 T 上有一次顶，即树 T 上有叶。

设 ε 是树 T 的边数，ν 是其顶数，则有公式

$$\varepsilon = \nu - 1 \tag{3.2}$$

公式(3.2)的证明很朴素：因为 T 有叶，设 v_1 是 T 的叶，从 T 上删除 v_1，则与 v_1 相关联的那条边也随之消失，于是 T 减少了一边一顶；$T_1 = T - v_1$ 仍是树，T_1 有叶 v_2，$T_2 = T_1 - v_2$，则 T_2 比 T_1 少一边一顶，如此继续往下揪叶，由于顶的有限性，揪去 $\nu - 1$ 个顶后，T 损失了 $\nu - 1$ 条边，这时只一个顶 v_ν 而无边了，所以 $\varepsilon = \nu - 1$。

从(3.2)可以推导出不止一个顶的非退化树 T 至少两个叶，而且恰有两个叶的树是一条轨。

事实上，若非退化树 T 只一个叶，则

$$2\varepsilon = \sum_{i=1}^{\nu} d(\nu_i) \geqslant 2(\nu - 1) + 1$$

$$2\varepsilon \geqslant 2(\nu - 1) + 1 = 2\nu - 1$$

$$\varepsilon \geqslant \nu - \frac{1}{2}$$

此与 $\varepsilon = \nu - 1$ 矛盾。所以 T 至少两叶。

若 T 只两个叶，其余顶的次数不小于 2，于是 $2\varepsilon = \sum_{i=1}^{\nu} d(v_i) = 2(\nu - 1)$，于是非叶顶次数之和为 $2\nu - 4 = 2(\nu - 2)$，可见非叶顶每个次数都不超过 2，即每个非叶顶次数恰为 2，故 T 是一条轨。

公式(3.2)很有用，下面是它的一些推论。

推论 1　e 是树 T 上任一边，则 $T - e$ 不连通。

事实上，T 有 $\nu - 1$ 条边，于是 $T - e$ 有 $\nu - 2$ 条边，但仍是 ν 个顶，且 $T - e$ 仍无圈，如果 $T - e$ 连通，则它是树，应有 $\nu - 2 = \nu - 1$，矛盾，所以 $T - e$ 不连通。

推论 2　T 是树，在 T 上添加一条边 e，则 $T + e$ 恰含一个圈。

T 满足顶数比边数多 1，又添一条边，则 $T + e$ 不满足公式(3.2)，所以 $T + e$ 不再是树，连通图 T 添加边后当然还是连通的，又不是树，所以 $T + e$ 上有圈；如果 $T + e$ 有两个圈，则 $(T + e) - e = T$ 上无圈；另一方面，$T + e$ 这两个圈都含 e，去掉 e 后，变成了一个大

圈,与 T 上无圈矛盾,所以 $T+e$ 上仅一圈。

推论 3 烃 C_mH_n 中 C 是 4 价,H 是 1 价,价键不构成回路,则对每个自然数 m,仅当 $n=2m+2$ 时,化合物 C_mH_n 才可能存在。

事实上,把碳、氢原子看成一个图 G 的顶,价键视为边,则此图 $m+n$ 个顶,又无回路,则是树,其边数是顶数减 1,即边有 $m+n-1$ 条,另一方面, $\sum\limits_{V\in V(G)} d(V)=4m+n=2(m+n-1)$, 从而 $n=2m+2$,即 $n=2m+2$ 是 C_mH_n 存在的必要条件。

图论在化学上有大用处,有一门称为“分子拓扑学”的学科,就是用图论的方法研究化学分子结构的。

(2) 树是同顶数连通图中边数最少者

对于顶数相同的两个连通图 G 与 T,其中 T 是树,如果 G 也是树,则 G 与 T 的边数相等,都是顶数减 1;如果 G 不是树,则 G 中有圈,从圈上删除边 e_1 后,$G-e_1$ 仍连通,这时 G 至少减少了一个圈,用删除圈上边的办法有限次,可得一个无圈连通图 $G_k=G-e_1-e_2\cdots-e_k$,即 G_k 是树,与 T 有相同的边数,而 G 比 G_k 的边多 k 条,所以 G 比 T 边多。

树上边边是桥。

所谓桥,是指连通图的一条边,删除它之后该图就不连通了。