3.9 没有奇圈雌雄图

同学甲:你看我在纸上任意画了一些直线,把平面划分成若干区域,给你绿、红两色彩笔,能把每区皆染上一种颜色,且使邻区异色吗?

同学乙:当然能,不信你听我说。

事实上,我们以区域为顶,仅当二区域有公共边界时,在此二顶点间连一边,且使这一边与你画的直线只一个交点。得到了一个图 G;于是 G 中不会有奇数条边围成的所谓奇圈,这种图必然是二分图,也称雌雄图,即 $V(G)$可划分成两个子集 X 与 Y, X 中顶点两两不相邻(不相爱), Y 中顶两两不相邻(不相爱),这时,把 X 中顶皆染成红色, Y 中顶皆染成绿色,则邻顶异色,即邻区异色了。

同学甲:为什么没有奇圈的图一定是二分图呢?

同学乙:这一点很容易理解,例如四边形 $ABCD$ 是一个偶圈,即

有四条边(偶数条边)围成，$\{A, D\} = X$，$\{B, C\} = \overline{Y}$，就识破它的"二分性"了，如图 3-9，事实上偶圈上的顶为 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$时，令 $X = \{v_1, v_3, \cdots, v_{2k-1}\}$，$Y = \{v_2, v_4, \cdots, v_{2k}\}$，即可把顶一分为二，使 X 中的顶两两不邻，Y 中亦然。

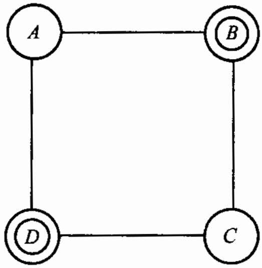

图 3-9

同学甲：你这不算证明，至多能算个说明。

同学乙：那就让我证明给你看。

我们约定 $d(u, v)$表示两顶 u, v 的距离，即连接 u 与 v 的轨道中的边数最少者的边数。不妨设 G 是连通图，任取 $v_1 \in V(G)$，令

$$X = \{w \mid w \in V(G), d(v_1, w)\text{是偶数}\}$$

$$Y = \{w \mid w \in V(G), d(v_1, w)\text{是奇数}\}$$

则 $X \cup Y = V(G)$，$X \cap Y = \varnothing$，任取 $u, v \in X$，我们来证 u, v 不相邻，设 $P_1(v_1, u)$是从 v_1 到 u 的最短轨，$P_2(v_1, v)$是从 v_1 到 v 的最短轨，又设 u_1 是 P_1 与 P_2 上最后一个公共顶，由 P_1 与 P_2 的最短性质，故 P_1 上一段 $P_{11}(v_1, u_1)$与 P_2 上一段$P_{21}(v_1, u_1)$等长，且是 v_1 到 u_1 的最短轨，又 P_1 与 P_2 之长是偶数，从而 P_1 上一段 $P_{12}(u_1, u)$与 P_2 上一段 $P_{22}(u_1, v)$有相同的奇偶性，若 u 与 v 相邻，则由 P_{12}、P_{22}及边 uv 围成的圈是奇圈，与 G 中无奇圈矛盾，故 X 中的任二顶不邻，同理 Y 中任二顶不邻，可见无奇圈的图是二分图。

前面我们已经讲过，二分图无奇圈，所以二分图的充分必要条件是无奇圈。

同学甲：你还欠证明开始时以区域为顶的那个图 G 中确无奇圈啊！

同学乙：这个容易。如果那个图 G 中有奇圈 C，由于 G 的每边当初造 G 时是与你画的直线仅一个交点，于是 C 与你画的直线一共

只有奇数个交点，但与这个圈相交的每直线与圈的交点是偶数个，矛盾！所以 G 中不会有奇圈。

同学甲：谢谢你的严格证明；看起来只靠直观和说明还不算是数学，数学的魅力出自它的严格性。

同学乙：数学的一个无可置疑的特征是，它实际上是一种不可比拟的严格语言！每个数学家都警惕地守卫着他们的科学的严格性，在不够严格的问题出现时，他们互相之间半点也不宽容。