3.8 一辆车跑遍村村寨寨

我们把完全图的每边用红绿两种颜色之一任意染色，把红边擦掉(保留端点)得绿边图 G_1，把绿边擦掉得红边图 G_2，G_1 或 G_2 中可能有孤立顶或互相不连通的几“片儿”，每一片作为一个子图都是连通的，上述 G_1 与 G_2 称为互补图，它们并在一起正好是原来的那个完全图；如上所说，G_1 或 G_2 不一定全是连通的，也可能全是连通的，例如在图 3-8(a)中的 G_1 与 G_2 都是连通图，图 3-8(b)中的 G_1 与 G_2 中 G_1 不连通，G_1 有三个连通片，其中一个是孤立顶。所谓连通片是一个不连通图的几个子图，它们每个都连通，彼此却不连通。

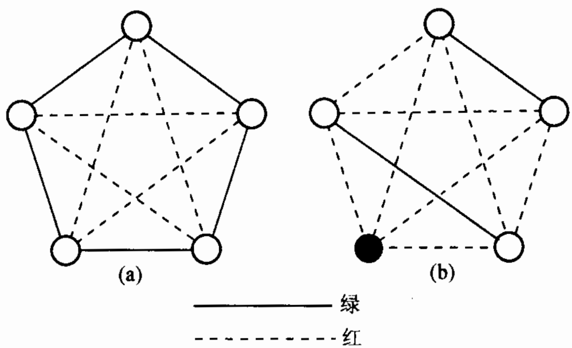

图 3-8

两个互补图之中，至少一个是连通的。

事实上，不妨设绿图 G_1 不连通，只欠证红图 G_2 连通。若这时 G_2 也不连通，设 $G_{21}, G_{22}, \cdots, G_{2\omega}$是 G_2 的全体连通片，$\omega \geqslant 2$，任取

u, v 两顶,若 $u, v \in G_{2i_0}, i_0 \in \{1, 2, \cdots, \omega\}$,再取 $w \in G_{2i_1}, i_1 \in \{1, 2, \cdots, \omega\}, i_0 \neq i_1$,则边 $uw, vw \in E(G_1)$,于是在绿图 G_1 中 u 与 v 有绿轨相连接,若 u, v 在 G_2 分属两个连通片,则边 uv 是绿色的,u, v 之间也有绿色轨相连接,总之对于任二顶 u, v,都有绿轨连接,故绿图 G_1 连通,与 G_1 不连通矛盾,故 G_2 连通。

如果 G 与 H 是两个图,且 $V(G) = V(H), E(H) \subseteq E(G)$,则称 H 是 G 的生成子图;互补的图都是相应的完全图的生成子图。

村镇若干,任两个村子之间都修筑了公路,有的两村之间是二级公路,有的两村之间是四级公路,规定汽车只在二级公路上行驶,拖拉机只在四级公路上行驶,问是否乘坐汽车或拖拉机中的一辆车即可到达每个村子?

答案就在上述论证之中,一辆车跑遍村村寨寨。