3.7 馋嘴老鼠哪里藏

一只老鼠想在 $3\times3\times3$ 的立方体点心堆上咬出一条洞，这个洞通过 $1\times1\times1$ 的 27 块小立方体的中心各一次，假设它是从大立方体的一角咬起的，它从一块 $1\times1\times1$ 的小点心的中心沿与某侧面正交的方向向邻近的未尝过的小点心块咬去，只进不退，问它能否尝遍 27 块小点心后藏在大立方体中心？

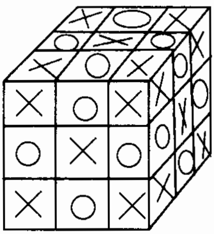

图 3-7

我们把图 3-7 所示的点心上 27 块小立方体分成两类，一类用○标志，一类用×标志。大立方体中心处那小块也标以○型；构造一图 $G(V,E)$，$V=X\cup Y$，其中 X 是×型小立方体结成的集合，Y 是○型小立方体组成的集合；仅当两个小立方体有公共侧面时，在两顶间连一边；再在老鼠开始咬的那块小点心与大立方体中心那块小点心之间加一条边，则 G 是 27 顶的二分图。

问题问的是 G 是否有含 27 个顶的圈。

所谓圈是指图上的一条闭曲线，其上的每顶仅通过一次即可把它画出。例如图 3-2 的七桥图上 $A1C3B4D6A$ 就是一个圈(其上还有别的圈)。

我们画二分图时，把 X 集的顶画在上层，Y 集中的顶画在下层，如果此图中有圈 C，设 $x_0\in X$ 在 C 上，则从 x_0 出发沿 C 行走一定是(从 x_0 下沉，上升)，(下沉，上升)，…，(下沉，上升到 x_0)，可见 C 有偶数条边，即二分图中无奇数个顶的圈。

我们上述的“鼠洞图” G 是二分图，所以不会有含 27 个顶的圈，可见老鼠不可能藏在大立方体的中心，它只能吃遍点心后逃之夭夭或当场被擒。

顺着老鼠前进的路径看，它咬出的洞上通过的小点心块都是一次性的；一般地，在一个图上画一曲线，其起止顶点不同，且其上的顶皆通过一次，这一曲线称为图的一条轨道，记成 $P(u, v)$，u 与 v 是轨 P 的起止顶，一个图如果任二顶间皆有轨相连，则称其为连通图。