3.6 握手言欢话奇偶

(1) 晚会上大家握手言欢，握过奇次手的人数一定是偶数

事实上，让参加晚会的每个人都报告出自己握过手的次数，设参加晚会的人为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，他们分别报告说握过 $d(v_1), \cdots, d(v_n)$ 次手，则 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$是偶数，这是因为每当有两人握手，则他们对总和 $d(v_1)+\cdots+d(v_n)$恰提供了数值 2。不妨设 $d(v_1), \cdots, d(v_n)$中 $d(v_1), \cdots, d(v_k)$是奇数，$d(v_{k+1}), d(v_{k+2}), \cdots, d(v_n)$是偶数，则 $d(v_{k+1})+d(v_{k+2})+\cdots+d(v_n)$是偶数，于是 $d(v_1)+\cdots+d(v_k)$也是偶数，而 $d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_k)$每个皆奇数，所以它们的个数不能是奇数，不然其总和得不出偶数，即 k 是偶数，从而证明了握奇次手的人数是偶数。

若把$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$视为一个图的顶集，仅当 v_i 与 v_j 握手时，在 v_i 与 v_j 之间加一边 v_iv_j，则得到一个图$G(V,E)$，v_i 握手的次数即与它关联的边的条数，我们称 $d(v_i)$是 v_i 的“次数”或“度数”，于

是由上述论证知

$$d(v_1)+\cdots+d(v_n)=2\varepsilon \tag{3.1}$$

其中 ε 是$G(V,E)$的边数。公式(3.1)是 Euler 1736 年给出的。从此还可以得出奇次顶的个数是偶数。

(2) 碳氢化合物中氢原子个数是偶数

以每个原子为顶,每条化学键为边,构成一个图,在碳氢化合物中碳是四价,氢是一价,故只有“氢原子顶”是奇次的,所以这些奇次顶个数是偶数,即碳氢化合物中氢原子个数是偶数。

(3) 是否有这样的多面体,它有奇数个面,每个面有奇数条棱

假设有这种多面体,以其每个面为顶,使当两面有公共棱时,在此二相应的顶间连一边,构成图 $G(V,E)$,于是 $V(G)$中元素个数是奇数,而且每个 $d(v_i)$皆奇数,$v_i\in V(G)$,与奇次项个数是偶数相违,可见没有奇数个面每面奇数条棱的多面体。

(4) 两个人或两人以上的人群中,必有两个人在此人群中的朋友数一样多

以人为顶,仅当二人为朋友时,在此二人之间连一边,得一“友谊图”$G(V,E)$,设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,不妨设各顶的次数为 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d(v_n)$,如果等号皆不成立,即

$$d(v_1)<d(v_2)<d(v_3)<\cdots<d(v_n)$$

①若 $d(v_n)=n-1$,则每个顶皆与 v_n 相邻,于是 $d(v_1)\geqslant 1$,$d(v_2)\geqslant 2,\cdots,d(v_n)\geqslant n$,与 $d(v_n)=n-1$ 相违。

②若 $d(v_n)<n-1$,由于 $d(v_1)<d(v_2)<\cdots<d(v_n)$,所以,$d(v_1)\geqslant 0,d(v_2)\geqslant 1,d(v_3)\geqslant 2,\cdots,d(v_n)\geqslant n-1$,与 $d(v_n)<n-1$ 相违。

至此知 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d(v_n)$中至少有一处等号成立,即有两人朋友数一样多。