3.5 两个令人失望的猜想

(1) 乌拉姆(Ulam)猜想

G_1, G_2 是两个图, $V(G_1)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $V(G_2)=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $n \geqslant 3$, 且 $G_1-v_i \cong G_2-u_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $G_1 \cong G_2$, 其中 G_1-v_i 是从 G_1 中删去顶点 v_i 及与 v_i 相关联的边所得之图。

乌拉姆猜想的实际模型是:两张相片,用左手捂住左边那张相片的一部分,右手捂住右边那张相片的相应部分,例如都捂住左眼,能看到的相片的大部分形象一致,再用左右手分别捂住两相片的另一对相应部分(例如右耳),结果能看到的相片的大部分仍然一致,如此轮番地观察各次相应的暴露部分,都会看到相同的形象,则谁都相信两张相片是同一人或孪生兄弟的留影。

乌拉姆猜想是 1929 年提出的,也许正因为它过于直观可信,证明反而十分之难,又不能拿它当公理来对待,这就给数学家们出了一道难题,很多知名数学家都无法解决这一猜想! 虽然它未必难到令人绝望的程度,但想用手和笔轻易写出其证明,恐怕目前还是不现实的。

(2) $3x+1$ 问题

20 世纪 30 年代汉堡大学的卡拉兹(Callatz)提出一个猜想:

$x_0=n_0$, n_0 是自然数,若 n_0 是偶然,则取 $x_1=\frac{x_0}{2}$,若 n_0 是奇数,则取 $x_1=\frac{3x_0+1}{2}$; x_1 是偶数,则取 $x_2=\frac{x_1}{2}$, x_1 是奇数,则取 $x_2=\frac{3x_1+1}{2}$,如此进行,则到某一步, $x_k=1$。

东京大学的 N. 永内达(Nabuo Yoneda)用计算机检验了所有不超过 $2^{40} \approx 1.2 \times 10^{12}$ 的自然数,结果都符合卡拉兹的猜想。这个问题

在数学史上闹得沸沸扬扬，1950 年，卡拉兹在马萨诸塞州召开的世界数学家大会上向与会的数学家公布了这一问题，后来，耶鲁大学的师生纷纷讨论这一貌似初等的猜想，但谁也证明不了它，弄得很多学生不专心上课，一心冲击 $3x+1$ 问题，有人戏称抛出这个"鬼猜想"的人是蓄意延缓美国数学教学与研究工作的一个阴谋。著名的图论学家厄尔多尔(Erdös)指出："数学还没有发展到能解决这个问题的水平。"

如果把一批自然数放在最高层，用 $3x+1$ 问题的规则算出第二层的值，继而算出第三层的值，每层的㊈都是顶，甲数算出乙数时，则在图上画有向边㊙→㊁，得到的有向图称为卡拉兹有向图，图 3-4 就是一个卡拉兹图；$3x+1$ 问题即猜想说卡拉兹图的最底层是顶①。