1.5 张丘建百钱买百鸡

中国古代数学家张丘建在名著《张丘建算经》中提出下面的百鸡问题：

“鸡翁一，值钱五，鸡母一，值钱三，鸡雏三，值钱一。百钱买百鸡。问鸡翁、鸡母、鸡雏各几何?”

张丘建生卒年代已不可考，唯知《张丘建算经》为我国古代十大算经之一，在隋朝该书已广为流传(与之齐名的另外九部算经是：《周髀算经》、《九章算术》、《数术记遗》、《海岛算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算

径》、《五曹算经》、《五经算术》和《缉古算经》，统称《算经十书》)，是我国隋唐时代颁布的"算学"教科书，亦是当时世界最高水平的数学经典。它记载着我国古代数学的辉煌成就，是唐代数学教育家李淳风，算学博士梁述和太学助教王真儒奉皇命审定注释成册的，完成于656年。

百鸡问题的数学模型如下：设 x, y, z 分别为鸡翁、鸡母和鸡雏的数目，则 x, y, z 应满足方程组

$$\begin{cases} 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \\ x+y+z=100 \end{cases}$$

其中 x, y, z 是非负整数。

消去未知数 z，x 与 y 应满足方程

$$7x+4y=100 \tag{1.1}$$

考虑(1.1)相应的齐次方程

$$7x+4y=0 \tag{1.2}$$

的整数通解，显然 $x=-4t, y=7t$，t 是整数。由观察得知(1.1)有整数特解 $x_0=-100, y_0=200$。于是(1.1)的整数通解为

$$\begin{cases} x=-4t+x_0=-4t-100 & (1.3) \\ y=7t+y_0=7t+200 & (1.4) \end{cases}$$

我们从(1.1)的全体整数解(通解)中挑选非负整数解，欲 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$，则应有

$$\begin{cases} -4t-100\geqslant 0 \\ 7t+200\geqslant 0 \end{cases}$$

解此不等式组得

$$-\frac{200}{7}\leqslant t\leqslant -25$$

t 应取 $-28, -27, -26, -25$ 四个值。

由 $x+y+z=100$ 得 $z=100-x-y$，把 $t=-28, -27, -26,$

-25 代入(1.3)(1.4)得四组解(x, y, z)为

$(12,4,84)$，$(8,11,81)$，$(4,18,78)$，$(0,25,75)$

一般地,在整数范围内考虑方程

$$ax + by = c \tag{1.5}$$

a, b 非零,若能看出(1.5)的一个特解 $x = x_0$, $y = y_0$,相应的齐次方程 $ax + by = 0$ 的通解为 $x = -b_1 t$, $y = a_1 t$,其中 a_1, b_1 无公因数,且 $a_1 b = b_1 a$,则(1.5)的通解为

$$x = x_0 - b_1 t,\ y = y_0 + a_1 t$$

$t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

京津唐一带民间流传一道趣题如下:

一百匹马,一百块瓦,大马驮仨,中马驮俩,小马驹子俩驮一块,问大马、中马和马驹各几匹?

这一问题的数学模型如下:

设 x, y, z 分别是大马、中马和马驹数,则

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 2y + \dfrac{1}{2}z = 100 \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 x, y, z 是非负整数。

消去未知数 z 得

$$5x + 3y = 100 \tag{1.7}$$

(1.7) 有特解 $x_0 = 14$, $y_0 = 10. 5x + 3y = 0$ 有通解

$$x = -3t, \quad y = 5t$$

于是(1.6)的通解是

$$x = -3t + 14, \quad y = 5t + 10$$

由 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 得

$$-3t + 14 \geqslant 0, 5t + 10 \geqslant 0,$$

$$-2 \leqslant t \leqslant \frac{14}{3}$$

t 可以取值为 $-2,-1,0,1,2,3,4$，相应的解 (x,y,z) 为

$$(20,0,80),\ (17,5,78),\ (14,10,76),\ (11,15,74),$$
$$(8,20,72),\ (5,25,70),\ (2,30,68)$$

我们看到的 $x^2+y^2=z^2$ 和 $ax+by=c$ 在正整数或非负整数范围内的解不唯一，这种解不唯一的方程称为不定方程或丢番图方程。