3.2 人们跑断腿，不如欧拉一张图

普瑞格尔河流过哥尼斯堡城(原名加里宁格勒)市中心，河中有岛两座，筑七座古桥，如图 3-1 所示，每逢节假日，市民纷纷上岛消遣，老幼携扶，游玩散步，不知何日何人提出下面问题：请过每座桥恰

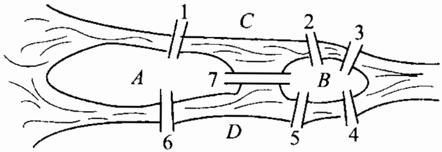

图 3-1

一次，再返回出发点。

反复的奔走试行和失败，使人们对成功的可能发生疑惑，猜想问题无解，但又谁也说不清其中道理，于是有好事者去请教年轻的数学家欧拉(Euler)，刚开始欧拉也看不出这是一个数学问题，1736 年，29 岁的欧拉把这一问题化成数学问题，严格地论证了上述“七桥问题”无解，并由此开创了图论与拓扑学的思维方式和诸多概念与理论，1736 年遂被公认为图论学科的历史元年，欧拉被尊为图论与拓扑学之父。

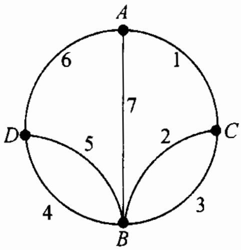

图 3-2

欧拉把 A, B, C, D 四块陆地抽象成四个点，当两地有一桥相通时，在两地相对应的点间连一曲线，此曲线之长短曲直并不介意，于是把图 3-1 的地图抽象成图 3-2 这种几何图形。把桥编号为 1 号桥，2 号桥，……，7 号桥。上岸记成 C，下岸记成 D，两岛分别为 A, B，如图 3-1，图 3-2。从图 3-2 我们看到，每个点 A, B, C, D 都和奇数条线段相连接。以 A 点为例，设 A 是出发点，不妨设通过 1 号桥远行，过一些时间通过 6 号桥返回 A，再通过 7 号桥远行，这时与 A 连通的 1 号桥，6 号桥和 7 号桥都已通行了一次，于是想回 A 已无桥允许通过了(因为约定每桥恰过一次)，所以 A 点不能做出发点，不然与 A 连接的桥都通过一次后是离开了 A 点，不能再返回 A 点了；对 B, C, D 也相似论证，可以知道这四点 A, B, C, D 都不能作为出发点，即七桥问题无解。

如果提议再建一些桥，最少建几座？建在何处？才能使每桥恰过一次又能返回出发点。

上面分析告知，如果某点与奇数条线段相连接，则该点不可做出发点；而一个点如果是“中转”点，则“进”“出”的次数要相等，所以与奇数条线段相连接的点也不能做“中转”点，可见，若从一点出发每桥

恰过一次再返回出发点必须每点处相连接的线段是偶数条；所以 A，B，C，D 之间要至少修两座新桥，才能使每点处都有偶数条线段相连。共有三种方式：A 与 C 之间，B 与 D 之间各建一桥；或 A 与 D 之间，B 与 C 之间各建一桥；或 A 与 B 之间，C 与 D 之间各建一桥即可，见图 3-3。

在图 3-3(a)上，例如从 A 出发再回到 A 的路线为：134682597，其中每个数码表示桥，这种路线不是唯一的，例如还可以按下面路线旅游：827134596，等等，还有哪些路线，请读者找一找。以其他点为出发点的路线可相似地找到；在图 3-3(b)、图 3-3(c)两种情形也可类似解决。

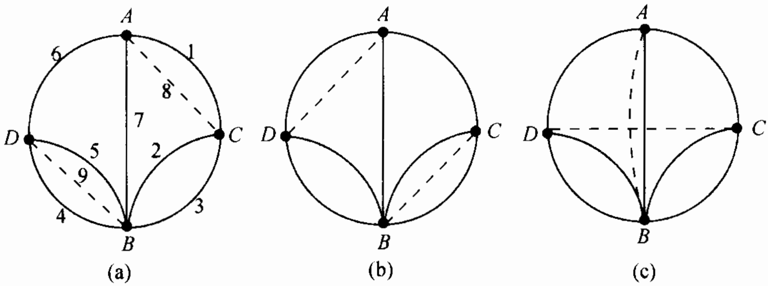

图 3-3

如果不要求一定返回出发点，但要求每桥恰过一次，这时的必要条件是至多一对点与奇数条线段连接。事实上，“中转”点皆与偶数条线段相连，如果仅有两个点与奇数条线段相连，则这两点可作为起止点，所以原来的七座桥即使不要求返回出发点也不能满足每桥恰过一次的要求，因为有四个与奇数条线段连接的点。但若取图 3-3 中那六条虚线中的一条作为新桥，则会满足要求。相应的旅游路线由读者标出。

如果不采用上面所述欧拉创立的方式来讨论，那么需要普查

七座桥的所有排列，即要审查$\frac{1}{2} \times 7! = 2520$种情形，如果真的去考查这 2520 种方案每种旅游方案是否可行，真的要跑断腿累死人了！就是在地图上观察判断，也够费时和烦人的了。还是欧拉的招数绝妙！