2.31 蚂蚁的最佳行迹

一只蚂蚁从一块砖的一个顶点爬向这块砖的对角顶点，它应沿怎样的路线爬行，才使其行迹最短(最省时间)?

设此砖为长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，三条棱长 $AB=a$，$AD=b$，$AA'=c$，$0<c<b<a$，蚂蚁从 A 点爬向 C' 点，见图2-105，作长方体的展开图如图 2-106。从展开图上看，蚂蚁应从直线段 $AA'B'C'$，AEC'，AFC'，AGC'，AHC' 中挑一条最短者作为它的爬行路线。

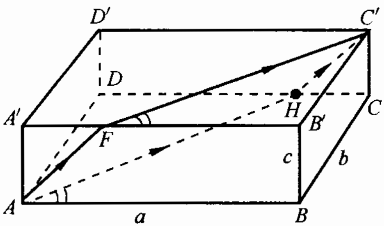

图 2-105

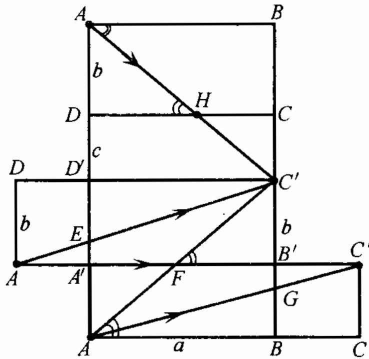

图 2-106

由勾股定理容易算出

$$AA'B'C' = a + b + c$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}$$

$$AEC' = \sqrt{(a + c)^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}$$

$$AFC' = \sqrt{a^2 + (c + b)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$$

$$AGC' = \sqrt{(a + b)^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$$

$$AHC' = \sqrt{a^2 + (b + c)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc} = AFC'$$

由于 $0 < c < b < a$，故有

$$bc < ac < ab < ab + ac + bc$$

所以以上五种路线以 AFC' 与 AHC' 最短，蚂蚁应沿着这两条路线之一爬向 C' 点。

在图 2-106 中 $\triangle AAC'$ 是等腰三角形，故

$$\angle BAH = \angle DHA = \angle BAC' = \angle B'FC'$$

$$\triangle ADH \cong \triangle B'C'F, FC' = AH$$

由图 2-105 可以看出，由于 $\angle B'FC' = \angle BAH$，故 $FC' \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} AH$，于是 $AHC'F$ 是平行四边形，蚂蚁是从 A 出发沿此平行四边形的任一组邻边爬到 C' 的。因为

$$\frac{B'F}{a} = \frac{b}{b + c}$$

所以

$$B'F = \frac{ab}{b + c}$$

可见,可以用规尺作图法找到 F 点和 H 点,从而确定蚂蚁的最佳行迹。

在其展开图是平面图形的立体表面上,蚂蚁从一点爬向另一点时,其最省时的行迹皆为展开图上连接此两点的各直线段中的最短者对应的立体上的那条曲线段。

例如在圆柱上,见图 2-107,从 A 点爬向 B 点,把此圆柱的侧面展开成 $AMNP$,见图 2-108,若 B 落在展开图的中位线 FE 上,则蚂蚁应按 AB' 或 MB' 两条线段在圆柱上的对应曲线段爬行,一条在圆柱的可视部分(即前面),一条在此圆柱的背后;如果 B 点落在侧面展开图的左(或右)半部,则蚂蚁按此半部中的直线段 AB'' 所对应的曲线爬行才最省时间。蚂蚁是在圆柱上盘旋着上升到 B 点的,如果盘旋的角速度是匀速的,则上升的速度是匀速的。角速度与上升速度之比是一个常数。

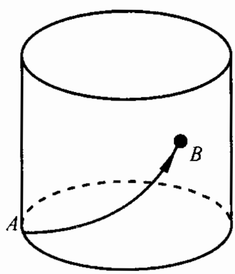

图 2-107

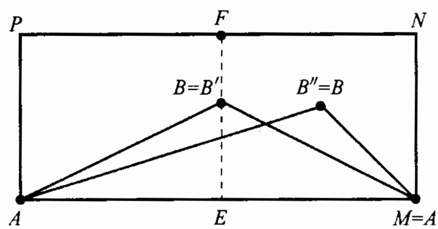

图 2-108

蚂蚁在圆锥上爬行的最佳路线也可用前面的展开图方法加以解决;有趣的是,如果它是从圆锥底面圆周上一点爬向此圆周的另一点,则不是沿圆周爬行,而是立刻向上爬,到达一个最高点后再向下爬行,见图 2-109,图 2-110,其最佳爬行路线曲线段 AB 在展开图(图 2-110)上是直线段 AB($\overset{\frown}{AB}$在底面圆周上是劣弧)。

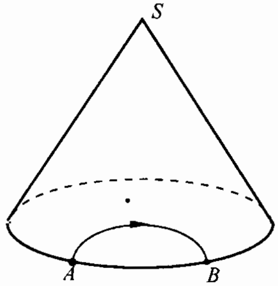

图 2-109

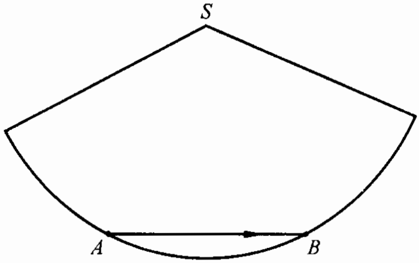

图 2-110

对于没有平面展开图的曲面，寻求蚂蚁从其上一点爬向另一点的最佳路线就不像上面的解法那么方便了，一般而言，不能用初等数学的方法来讨论。例如在球面上，蚂蚁从一点 A 爬向另一点 B，则应沿 A，B 所在的“大圆”上的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 爬行。所谓大圆，是其中心在球心的球面上的圆。沿大圆爬行时，路径弯曲的程度最小，最接近直线段 AB，但证明这一点并非易事。

另一个值得注意的问题是，如果在某曲面上有一个洞（把此洞视为一个点），若没有这个洞，存在一条蚂蚁最佳行迹，使它从 A 点爬到 B 点；有了这个洞，需要另寻佳迹。可惜这时可能不存在最佳行迹了！事实上，如果无洞时最佳行迹是唯一的，它爬到洞附近时必须绕行，绕行的半径（以洞为中心）可以是 $\frac{1}{n}$，$n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots\cdots$ 有无穷条行迹，都与无洞时的最佳行迹相差无几，越来越接近原最佳行迹，但哪一条也不是最佳的，都可以再缩短，可见这时已找不到最短行迹了。