

2.30 细胞几何学

在一个玻璃杯里调制比较浓的肥皂水,用一根饮用饮料的吸管去吹,杯内生出互相拥挤的肥皂泡;把电视机包装箱内的防震泡沫塑料块掰开,便会看到白色泡沫塑料的颗粒与上述肥皂泡相似的结构;如果把中午吃剩的米饭倒入凉水放在灶上煮成稀粥,等开锅时,也会看到升腾起来的状似肥皂泡的泡沫挤压在一起;在平面上,也有相应的情形发生,例如春夏大旱,稻田土地龟裂的形状,等等。这些几何形象具有数学上的统一性。我们看到,在平面的情形,是一些状似杂乱无章的凸多边形,在空间的情形,是一些状似杂乱无章的凸多面体,所以人们称诸如此类的结构为“无序结构”。早年大科学家牛顿和虎克等曾研究过肥皂泡。事实上,在化工、冶金、地质、物理等众多领域,这种无序结构有广泛应用。系统地数学地研究这种结构的第一人是 20 世纪俄国数学家沃热诺伊(Voronoi),所以这种结构亦称 Voronoi 网络。

下面以二维情形为例,用平面几何的方法讨论 Voronoi 网络。

平面上任取定 n 个点 v_1, v_2, \dots, v_n , 把每对点间用直线段连接, 以 v_i 为端点的线段组成的图形称为“星”, 记成 $S(v_i)$; 若 $S(v_i)$ 中任一线段所在直线的两侧, 皆有 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 中的点, 则称 $S(v_i)$ 为“正星”, 否则称为“偏星”; $S(v_i)$ 的一些线段的垂直平分线围成的凸多边形当中, 仅含 V 中的一个点 v_i 且其面积最小者, 称为以 v_i 为细胞核的细胞。

v_i 为细胞核的充要条件是 $S(v_i)$ 是正星。

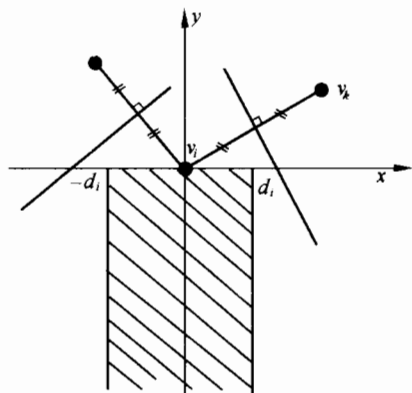


图 2-102

事实上,若 $S(v_i)$ 是偏星,则存在 $v_j \in V, v_i \neq v_j$, 直线 $v_i v_j$ 的一侧无 V 中的点;取 v_i 为坐标原点, $v_i v_j$ 所在的直线为 x 轴,取 y 轴的方向,使得第三四象限内无 V 中的点,构成平面直角坐标系,于是对每个 $k \neq i, 1 \leq k \leq n$, 线段 $v_i v_k$ 的垂直平分线与 x 轴的交点与原点的距离

$$d_{ik} \geq \frac{|v_i v_k|}{2}, \text{ 见图 2-102. 令 } d_i$$

是 $d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}$ 中的最小值,显然,在 x 轴下方以 y 轴为中位线相距为 $2d_i$ 的平行线间的带形区(阴影区)内无 $v_i v_k$ 垂直平分线上的点,其中 $k \neq i$,所以 $v_i v_k$ 的垂直平分线族不能围成内含 v_i 的凸多边形,即 v_i 不是细胞核。

反之,若 $S(v_i)$ 是正星,我们来论证 v_i 是细胞核。作与 v_i 距离足够大的直线 l ,使得 l 的一侧无 V 中的点。平移 l 使其与 v_i 距离缩小,一定存在一个时刻,此时首次发现 V 中的点与 l 接触,设这第一批与 l 接触的点在 l 上以正向排列为 $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1m}$ (皆异于 v_i),所谓正向是指沿此方向在 l 上行进时, l 左侧有 V 中之点。由于 $S(v_i)$ 是正星,以 v_{11} 为中心按顺时针转动 l ,转过某一角度 $\alpha_1 > 0$,使得直线 l 扫过的区域内无 V 中之点,这时 l 转到 l_1 的位置,且 l_1 上有一点 $v_2 \in l$,但 $v_2 \in V, v_2 \neq v_i$ 。不妨设 v_2 是 l_1 上按其正向而论的第一个 V 中的点;以 v_2 为中心顺时针转动 l_1 ,转过某角度 $\alpha_2 > 0$,得直线 l_2 , l_1 扫过的区域内无 V 中的点,但 l_2 上第一个 V 中的点是 v_3 , $v_3 \neq v_i, v_3 \in l_1$ 。依此类推,这种转动至少会发生两次。又 V 中点

是有限的,故存在有限条直线 $l, l_1, l_2, \dots, l_k (k \geq 2)$, 其上分别有点 $v_1, v_2, \dots, v_{(k+1)_1} = v_{1_m}$, 这些点为顶构成内含 v_i 的凸多边形 $v_1 v_2 \dots v_{(k+1)_1}$ (顺时针序)。作 $v_i v_1$ 的垂直平分线 l_1' , 作 $v_i v_2$ 的垂直平分线 l_2' , 则 l_1' 与 l_2' 相交于 $\angle v_1 v_i v_2$ 内部, 见图2-103。 $\angle 1 + \angle \alpha_1' = \pi$, 所以 $0 < \angle 1 < \pi$ 。同时, $v_i v_2$ 的垂直平分线 l_2' 与 $v_i v_3$ 的垂直平分线 l_3' 相交于 $\angle v_2 v_i v_3$ 内部, 且 $0 < \angle 2 < \pi$, 依此类推, 得到一个由 $v_i v_1, v_i v_2, v_i v_{(k+1)_1}$ 的垂直平分线围成的内含 v_i 的凸多边形 K , 可见以 $S(v_i)$ 的一些边的垂直平分线围成的凸多边形存在, 又由于 V 的元素有限, 故这种凸多边形的个数有限, 从中挑选面积最小者, 即为以 v_i 为细胞核的细胞。

我们已经知道, 当 $S(v_i)$ 是偏星时, v_i 不是细胞核; 这时, 会存在一个无界平面区域, 其中内含 V 的唯一一点 v_i , 其边界由 $S(v_i)$ 的某些边之垂直平分线上的部分线段或射线组成, 而此无界区域内不含 $S(v_i)$ 上的边的垂直平分线上的点。我们把 V 装入一个盒子里, 则上述无界区域在盒子里的部分称为“皮肤细胞”。

皮肤细胞存在的充分必要条件是 $S(v_i)$ 是偏星, 这时称 v_i 是皮肤细胞核。

可以证明, 以 v_i 为细胞核的细胞至多一个。对于三维空间的情形, 只需把平面情形的垂直平分线改成垂直平分面, 凸多边形由凸多面体代替, 面积由体积代替, 则可把上述论证推广到三维空间, 建立相似的一套概念与结论。

上述数学模型反映的实际模型是: 每个细胞核都以相同的速度向各个方向均匀生长, 直至细胞间互相接触挤压而停止生长, 于是构成了一块细胞的无序结构或称机体。肥皂泡或泡沫塑料等形成的数学机制正是如此。图 2-104 画的是二维细胞群的局部示意图。

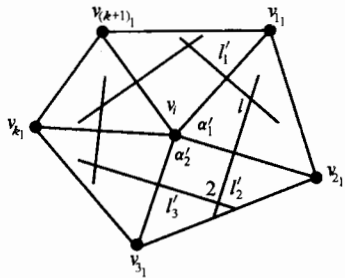


图 2-103

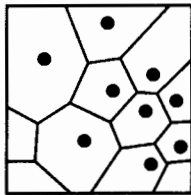


图 2-104