2.28 罗巴切夫斯基的想像几何学

1840年，罗巴切夫斯基在他的名著《平行线理论的几何研究》中说："三角形内角和小于 π 是允许的，由于由它推导出的结果当中不存在矛盾，它可以作为一种新几何的理论基础，我把这个新几何学称为'想像几何学'。"罗巴切夫斯基的这种观点和言论，对于两千多年来人们坚信欧几里得《几何原本》的几何学原则是现实空间的唯一正

确的描述,这种似乎是天经地义的理论是一种背叛、挑战和革命;大数学家高斯、鲍耶等也与罗巴切夫斯基几乎同时发现了有悖于欧几里得第五公设的新几何,只是由于高斯胆小怕事、明哲保身而不能如罗巴切夫斯基那样公开打出反旗。这种新几何学的诞生源于众多数学家对欧几里得第五公设证明的失败。

欧氏第五公设的文字表述和内容都显得复杂和不易接受,不像其他的公理(公设)那样自明而易于理解。自古以来就有不少学者怀疑第五公设是否是多余的,它能否由其他公设、公理逻辑地推导出来?人们付出了大量的精力去证明它,在欧氏抛出第五公设后的两千年间,很难举出有哪一位大数学家没有试证过第五公设。为什么这么多大数学家谁也证明不了第五公设呢?罗巴切夫斯基领悟到,第五公设本来就是独立于其他公理公设之外的一条公理,是只能接受而无需也不可能证明的真理;另外,既然我们可以承认这条并无自明性的命题为公理,为什么它的反面,即第五公设不成立的时候,不可以建立一种新几何呢?于是罗氏大胆地从几何中删去第五公设,用“存在内角和小于 π 的三角形”来替代它,建立了他称之为想像几何学的罗巴切夫斯基几何。罗氏之所以称自己的新几何学是想像的几何学,是因为在这种几何当中,推导出种种与人们的世俗观念和直观感觉相反的定理,在 19 世纪和 20 世纪初,人们还认为那些结果是不能采用只是可以自圆其说的一种逻辑结构而已,但现代物理学的研究表明,罗氏的想像几何学中的“想像”在物理现实中确有其事,都是真的。通过非欧几何的建立过程中的是非演变,使得现代科学工作者变得聪明了,大家的共识是,对于科学当中的不同的言论应持慎重的态度,用已知的知识系统去禁止新观点新技术的探索是一种反科学的态度。

为了讨论罗巴切夫斯基几何的基本事实,我们首先讨论欧几里得第五公设的充分必要条件。

命题 1 第五公设成立的充要条件是过直线外一点存在唯一的与该直线平行的直线。

事实上，设直线 b 是过直线 a 外一点 A 的与 a 平行的唯一直线，在 a 直线上取一点 B，则直线 AB 与直线 a，b 构成的内错角相等，这时若直线 c 与 AB 构成 β 角，且 $\alpha+\beta<\pi$ 时，如图2-93所示，则 c 与 a 不是同一条直线，由于过 A 点与 a 平行的直线只有 b 直线，所以 c 与 a 不平行，相交于 AB 右侧，即第五公设成立；必要性亦易证明。

命题 2 第五公设成立的充分必要条件是三角形内角和为 π。

由命题 1 及 2.27 节的命题 6，命题 2 的成立是显然的。

命题 3 第五公设成立的充分必要条件是同一直线的垂线与斜线相交。

命题 4 第五公设成立的充分必要条件是存在两个相似而不全等的三角形。

命题 4 的必要性平面几何中已有证明。

下面证明命题 4 中的充分性，即假如有两个不全等的相似三角形，则第五公设成立。设 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等，设 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$AB>A'B'$；在 $\triangle ABC$ 的两边 AB 与 AC 上分别取 $AD=A'B'$，$AE=A'C'$，如图 2-94。

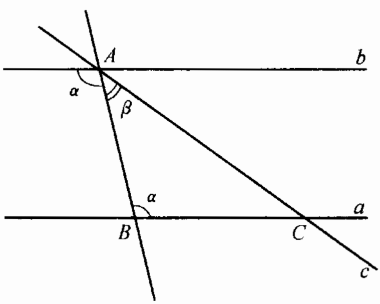

图 2-93

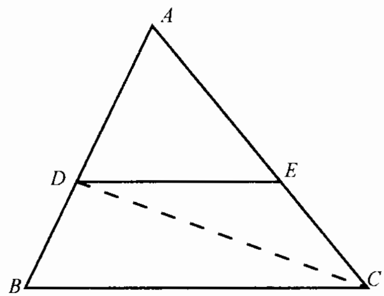

图 2-94

由于 $AD=A'B'<AB$，所以 D 点落在 A 与 B 之间。E 点不与 C 点重合，不然与 $\angle C=\angle C'$ 相违，同理 E 点也不能落在 AC 的外边，E 点落在 A 与 C 之间。这时四边形 $BCED$ 的内角和为 2π，故 $\triangle BDC$ 与 $\triangle DCE$ 的内角和皆为 π，这是因为三角形内角和不能大于 π。而三角形内角和为 π 的充要条件是第五公设成立。

命题 5 第五公设成立的充要条件是任一三角形存在外接圆。

必要性已在中学几何课中证明。下证充分性，即任一三角形有外接圆，则第五公设成立。由命题 3，只欠证明，任一三角形有外接圆，则直线 AB 的垂线与斜线相交，设过 B 的直线 $BC\perp AB$，而 AD 是 AB 的斜线，如图 2-95。M 是线段 AB 上任一点，设 L, N 分别是 M 点关于 AD 与 BC 的对称点，$ML\perp AD$，而 ML 对于直线 MA 是倾斜的，所以直线 ML 与 MA 是不同的两条直线，于是 L, M, N 不在同一直线上，又直线 AD 是与 $\triangle LMN$ 的顶点 M 与 L 等距的点之轨迹，所以这个三角形的外接圆圆心在 AD 上，又直线 BC 是与 $\triangle LMN$ 的顶点 M 与 N 等距的点之轨迹，所以 $\triangle LMN$ 的外接圆圆心在 BC 上，可见 BC 与 AD 相交，即直线 AB 的垂线与斜线相交。

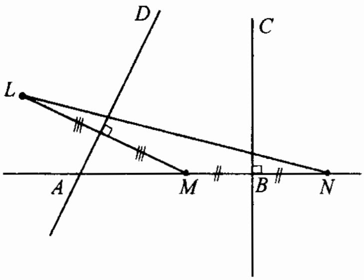

图 2-95

命题 6 第五公设成立的充要条件是与已知直线等距且在该直线同侧的三点在同一直线上。

必要性已经在中学平面几何中证明，下证充分性。设 A, B, C 三点在直线 a 同侧，且到 a 等距，即 $AA_1=BB_1=CC_1$，其中 $AA_1\perp a$，$BB_1\perp a$，$CC_1\perp a$，A_1, B_1, C_1 是垂足，见图 2-96。于是 $\triangle A_1BB_1\cong\triangle A_1AB_1$，$A_1B=B_1A$，又 $AA_1=BB_1$，故 $\triangle A_1AB\cong\triangle B_1AB$，$\alpha=\beta_1$；同理 $\alpha=\gamma$，$\beta_2=\gamma$，进而 $\beta_1=\beta_2=90°$，即四边形 A_1B_1BA 中四个内角皆

直角，由三角形全等可以得到$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6=\angle 7=\angle 8$，而$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4\neq\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=2\pi$，见图 2-97，于是$\angle 1+\angle 4+\angle 7+\angle 8=\pi$，即$\triangle AA_1B_1$ 的内角和为 π，故第五公设成立。

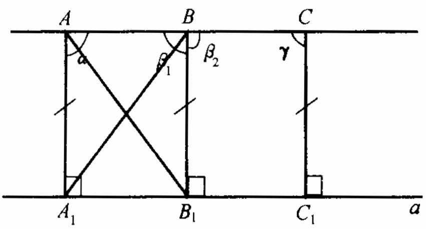

图 2-96

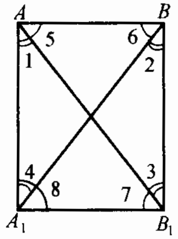

图 2-97

命题 7 第五公设成立的充分必要条件是角度数在大于0小于 π 之间的任一角内部的任一点可以引一直线，使此直线与该角的两边相交。

作任一角$\angle AOB$ 的角平分线OC，$\angle AOB<\pi$，设 P 是$\angle AOB$ 内任一点，过 P 作OC 的垂线PQ，见图 2-98，PQ 是OC 的垂线，而OA 是OC 的斜线，由命题 3，当第五公设成立时，PQ 与OA 相交；同理 PQ 与OB 相交。

下面证明充分性。设过$\angle AOB$ 内任一点P 可以引出一条与此角两边相交的直线，但第五公设不成立，则每个三角形内角和小于π，记

$$\delta(\triangle ABC)=\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)>0$$

设$\triangle ABC$ 中$\angle A$ 是最大的内角。设 A'是A 点关于BC 的对称点，见图 2-99。延长 AC，AB 成射线，A'在$\angle CAB$ 内部，于是过

A'点可以引直线EF 与AC，AB 分别相交于E，F 点。连 $A'C$，$A'B$，则有

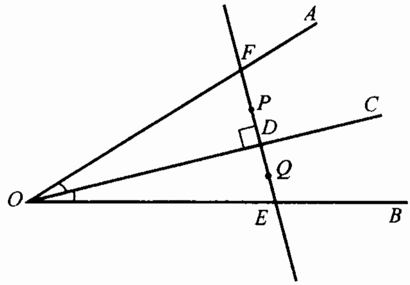

图 2-98

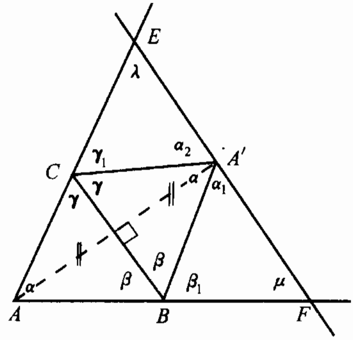

图 2-99

$$\delta(\triangle ABC)=\delta_0=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)>0$$
$$\delta(\triangle BCA')=\delta_0=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)>0$$
$$\delta(\triangle A'BF)=\delta_1=\pi-(\alpha_1+\beta_1+\mu)>0$$
$$\delta(\triangle A'CE)=\delta_2=\pi-(\alpha_2+\gamma_1+\lambda)>0$$
$$\begin{aligned}2\delta_0+\delta_1+\delta_2&=4\pi-\pi-\pi-\pi-(\alpha+\lambda+\mu)\\&=\pi-(\alpha+\lambda+\mu)\end{aligned}$$

于是

$$\delta(\triangle AEF)=\pi-(\alpha+\lambda+\mu)=2\delta_0+\delta_1+\delta_2$$
$$\delta(\triangle AEF)>2\delta(\triangle ABC)$$

对于$\triangle AEF$，仿上可以构造出另一三角形$\triangle_1$，使得$\delta(\triangle_1)>2\delta(\triangle AEF)>4\delta_0$，对$\triangle_1$，可以得到$\triangle_2$，使得$\delta(\triangle_2)>2\delta(\triangle_1)>8\delta_0$，依此知，存在$\triangle_k$，使得$\delta(\triangle_k)>2^{k+1}\delta_0$，当$k$足够大时，$\delta(\triangle_k)>\pi$，这是不可能的。

命题 8 第五公设成立的充分必要条件是圆内接正六边形的边长等于该圆半径。

必要性已在中学平面几何中得证，下证充分性。设AB是圆内接正六边形的一条边，且$AB=OA=OB$(图 2-100)，不用第五公设可以证明等边三角形三个内角相等。又$\overset{\frown}{AB}$是圆周的$\frac{1}{6}$，故$\angle AOB=$

$\frac{\pi}{3}$，于是$\angle AOB=\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{3}$，$\triangle OAB$的内角和为$\pi$，进而第五公设成立。

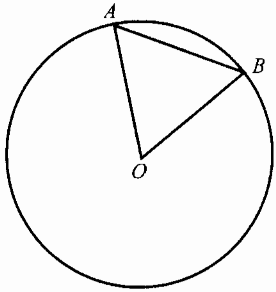

图 2-100

以上建立的命题 1，命题 2，……命题 8 八个充分必要条件，是欧几里得几何中与第五公设等价的八个命题，如果否定欧几里得第五公设，代之以相反的公理，则上述八个已为每个中学生视为几何金律的命题将全被否定，出现人们不情愿接受但又不得不接受的一种新几何。

罗巴切夫斯基用下面的公理替代第五公设：

设 a 是任一直线，A 是a 外一点，在 A 与a 确定的平面上，过 A 而不与 a 相交的直线至少有两条。

这条公理等价于：

存在内角和小于 π 的三角形。

在上述罗氏公理和欧几里得公理系统中删去第五公设所组成的公理系统中，建立的几何称为罗巴切夫斯基几何，与上述八个充要条件对应的，有以下八条命题。

命题 1′ 在平面上任一直线 a 外任取一点A，过 A 点与a 平行的直线至少两条。

命题 2′ 任一三角形内角和小于 π。

命题 3′ 平面上一直线的垂线与斜线并不一定相交。

命题 4′ 相似而不全等的三角形不存在。

命题 5′ 存在无外接圆的三角形。

命题 6′ 在平面上一直线的同侧与此直线等距的点的轨迹是一曲线，它上面任何三点不在同一直线上。

命题 7′ 过每一锐角的一边存在不与另一边相交的垂线。

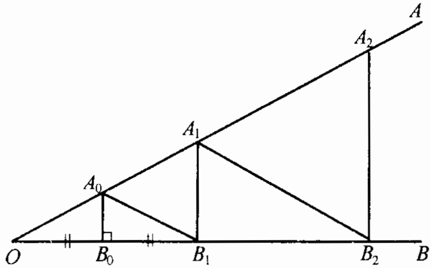

图 2-101

设$\angle AOB$是锐角，若过OB边的每一垂线皆与OA边相交，从OA上任一点A_0向OB作垂线A_0B_0，B_0是垂足，在OB上取O点关于$A'B'$的对称点B_1，从B_1点向上作OB的垂线，它与OA交于A_1，如图 2-101，与命题 5 相似地可以证出

$$\delta(\triangle OA_1B_1)>2\delta(\triangle OA_0B_0)$$

作O点关于A_1B_1的对称点B_2，则得

$$\delta(\triangle OA_2B_2)>2\delta(\triangle OA_1B_1)$$

依此类推得

$$\delta(\triangle OA_nB_n)>2\delta(\triangle OA_{n-1}B_{n-1})>\cdots>2^n\delta(\triangle OA_0B_0)$$

由于$\delta(\triangle OA_0B_0)>0$，故$\delta(\triangle OA_nB_n)>\pi$，这是不可能的。

命题 8′ 圆内接正六边形的边大于该圆半径。

事实上，在图 2-100 的$\triangle AOB$中，内角和小于π，而$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$\angle AOB$是$\triangle AOB$中的最大的角，而$\triangle AOB$中大角对大边，所以$AB>OA$。

从欧几里得几何的观点来看，上述命题 1′，命题 2′，……命题 8′这八个命题似为荒唐的假命题，而从罗巴切夫斯基几何的观点来看，它们却是数学科学不可或缺的严肃真理。

真理与假理都是相对的！从罗巴切夫斯基几何的观点看欧氏几何，例如“三角形内角和为π”，“正六边形边长等于其外接圆半径”等等，我们早已奉为金科玉律的几何信条，却不能得到承认！